

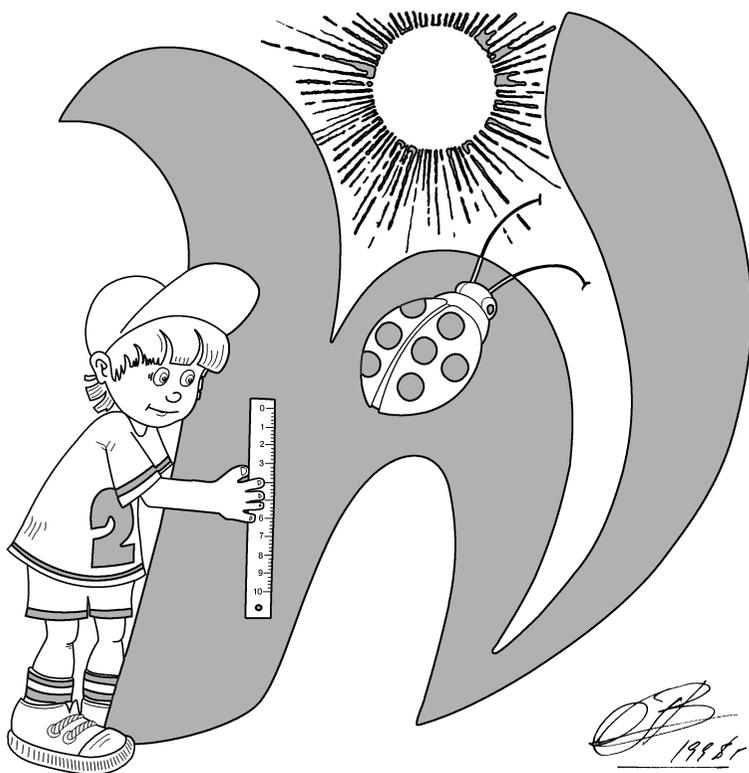
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Екатеринбург, 2015 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.

E-mail: physolymp@gmail.com

Сайт физических олимпиад школьников: physolymp.ru

Авторы задач

9 класс

1. Слободянин В.
2. Воробьёв И.
3. Замятнин М.,
Зыков И.
4. Аполонский А.
5. Мельниковский Л.

10 класс

1. Александров Д.
2. Шведов О.
3. Черноуцан А.
4. Воробьёв И.
5. Парфенов К.

11 класс

1. Варламов С.,
Гуденко А.
2. Савинов Е.
3. Гуденко А.
4. Воробьёв И.
5. Варламов С.

Общая редакция — Слободянин В.

При подготовке оригинал-макета использовалась издательская система L^AT_EX 2_ε.

© Авторский коллектив
141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Разгон поезда

Машинист настроил бортовой компьютер электрички так, чтобы он показывал среднюю скорость v на участке, пройденном между соседними опорами, поддерживающими контактный провод. Расстояния между любыми двумя соседними опорами одинаковы. Электричка отправляется с платформы «Новодачная» и разгоняется с постоянным ускорением. Через некоторое время машинист увидел, что компьютер показывает скорость $v_1 = 20$ км/ч. На следующем участке скорость оказалась $v_2 = 30$ км/ч. Какой была мгновенная скорость u электрички на границе между первым и вторым участками?

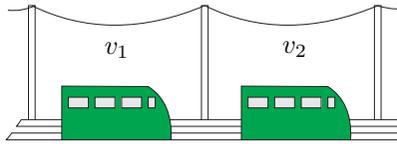


Рис. 1

Задача 2. Нажали и отпустили

Тележка соединена со стеной жестким стержнем. К ее упору прикреплена пружина, другой конец которой связан с бруском (рис. 2). Вначале пружина не деформирована. На брусок в течение некоторого времени действует постоянная горизонтальная сила F , направленная вдоль тележки. После прекращения действия этой силы брусок еще некоторое время смещается в сторону упора и возвращается, остановившись в исходной точке. Сила трения, действующая со стороны тележки на брусок, равна f . Трение в осях колес не учитывайте.

1. С какой силой N тележка давила на стержень в момент прекращения действия силы F ?

2. Найдите наибольшее значение силы N_{\max} давления тележки на стержень.

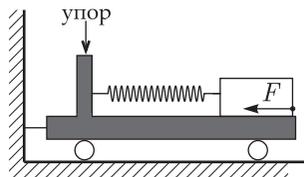


Рис. 2

Задача 3. Жара в холодильнике

В жаркие летние дни, когда в комнате установилась температура $t_0 = 30^\circ\text{C}$, экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что время работы двигателя холодильника стало вдвое превышать время бездействия. Решив оптимизировать его работу, экспериментатор регулятором изменил температуру внутри холодильника на $\Delta\theta = 9^\circ\text{C}$. В результате, время бездействия стало вдвое больше времени работы. Определите:

1. На какие температуры t_1 и t_2 был настроен регулятор в начале и в конце эксперимента?

2. На какую внутреннюю температуру t_m надо выставить регулятор, чтобы двигатель холодильника начал работать без перерыва?

3. При какой выставленной регулятором температуре t_3 частота включения холодильника станет максимальной?

Указание: Регулятор задает температуру внутри холодильника t в небольшом интервале $t \pm \Delta t/2$. Когда температура внутри становится равной $t + \Delta t/2$, двигатель холодильника включается, когда она снижается до $t - \Delta t/2$ — выключается. Считайте, что:

1) мощность подводимого тепла пропорциональна разности температуры внутри холодильника и окружающей среды и постоянна во всем интервале внутренних температур $t \pm \Delta t/2$.

2) тепловая мощность, отбираемая двигателем во время его работы у внутреннего объема холодильника, не зависит от температур.

3) изменением температуры в комнате можно пренебречь.

Задача 4. Неидеальные диоды

Электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке 3, содержит три одинаковых резистора сопротивлением $R_1 = R_2 = R_3 = R$ и три одинаковых диода D_1, D_2, D_3 . Зависимость силы тока, протекающего через диод, от напряжения на нём представлена на рисунке 4. Определите силу тока через амперметр I_A в зависимости от напряжения U_{AB} между точками А и В. Амперметр идеальный. Постройте график зависимости I_A от U_{AB} , указав значение силы тока и напряжение в характерных точках (например, максимум, минимум, излом).

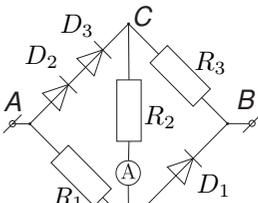


Рис. 3

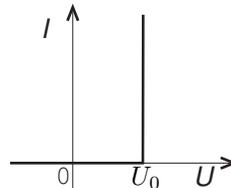


Рис. 4

Задача 5. Чунга-Чанга

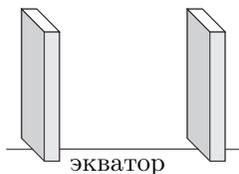


Рис. 5

Чебурашка и крокодил Гена весной поехали в Лагерь Дружбы на острове Чунга-Чанга. Остров расположен на экваторе. На территории лагеря построены два типовых 100-этажных корпуса (в виде прямоугольных параллелепипедов), один строго на востоке от другого. Здания корпусов параллельны друг другу и перпендикулярны экватору (рис. 5). Чебурашка поселился в западном ко-

пусе, а крокодил Гена - на десятом этаже восточного корпуса. Окна их комнат оказались выходящими друг на друга. В день весеннего равноденствия, 21 марта, солнце светило в окно Гены в течение $T_1 = 2$ часов, а в окно Чебурашки — $T_2 = 4$ часов.

1. На каком этаже живёт Чебурашка?
2. Что показывали часы Чебурашки, когда окна в корпусе Гены ему впервые показались золотыми?
3. В течение какого времени окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми?

Примечание. Окна кажутся золотыми, когда в них отражается Солнце. Многократные отражения не учитывать. В 12 часов Солнце находилось в зените.

10 класс

Задача 1. Упругая система

На гладкой горизонтальной поверхности расположена конструкция, показанная на рисунке 6 (вид сверху). Один конец пружины жёсткости k_1 прикреплён к грузу массы m , второй — к палочке П. У пружины жёсткости k_2 один конец закреплён неподвижно, а второй прикреплён к той же палочке П. На палочку всё время действует сила F , остающаяся постоянной по величине и направлению что бы ни случилось. Поначалу груз m удерживают неподвижно, а затем отпускают без толчка.

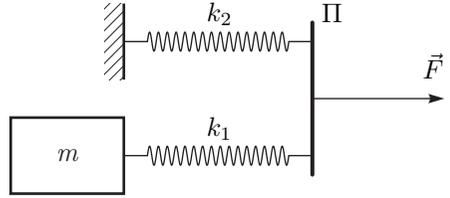


Рис. 6

1. Найдите максимальную скорость груза.
2. Найдите удлинение первой пружины в момент, когда её длина будет минимальна.

Считайте, что масса пружин и палочки равна нулю, длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, растяжения пружин в момент отпущения груза тоже одинаковы, силу F прикладывают к палочке таким образом, что она движется поступательно (не поворачивается при движении), трение отсутствует.

Задача 2. Исследование планеты

Спускаемый аппарат осуществляет посадку на поверхность экзотической планеты. Во время спуска проводилось измерение зависимости давления p в атмосфере планеты от расстояния z до поверхности планеты (график на отдельном листе). Измерение температуры, произведённое на высоте $z_1 = 5$ км дало значение $T_1 = 250$ К. Вычислите температуру T_0 у поверхности планеты. Считайте, что радиус планеты $R \gg z_1$. Атмосфера состоит из углекислого газа.

Примечание. График на отдельном листе необходимо сдать вместе с вашим решением.

Задача 3. Термоэлектродинамика

Два диска, по которым равномерно распределены заряды q и $-q$, могут двигаться без трения в длинном непроводящем теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально (рис. 7). Расстояние между дисками много меньше их радиуса. Между дисками находится некоторое количество гелия, за дисками газа нет, система находится в равновесии. Заряды дисков мгновенно уменьшают вдвое, после чего ожидают прихода системы в равновесие. Пренебрегая теплообменом, найдите, во сколько раз изменятся температура газа и расстояние между дисками.

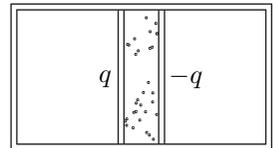


Рис. 7

Задача 4. Стенка с дыркой

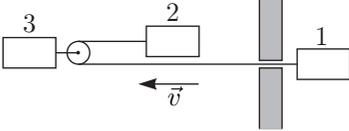


Рис. 8

Три одинаковых бруска движутся с одинаковыми скоростями \vec{v} . Длинная лёгкая упругая резинка, связывающая первый и второй бруски, проходит сквозь отверстие в массивной стене и через лёгкий блок, прикреплённый к третьему бруску (рис. 8). В начальный момент

времени резинка не растянута. Определите скорости брусков после упругого столкновения первого бруска со стеной в момент времени, когда резинка оказалась

1. максимально растянутой;
2. снова ненатянутой.

Трение в системе не учитывайте. Считайте, что пока резинка не станет снова ненатянутой, груз 2 не сталкивается с блоком, а груз 1 не ударяется о стену.

Задача 5. Нелинейность

Некоторые элементы электрических цепей являются нелинейными, то есть сила тока, протекающего через них, не пропорциональна приложенному напряжению. Допустим, что у нас есть лампа накаливания, для которой сила тока $I_{\text{л}}$ пропорциональна $\sqrt{U_{\text{л}}}$, диод, у которого $I_{\text{д}}$ пропорциональна $U_{\text{д}}^2$, и источник постоянного напряжения. При этом и лампа, и диод обладают одинаковым свойством: если подключить любой из этих элементов к источнику в качестве нагрузки, то мощность тепловых потерь на нагрузке будет максимально возможной для данного источника. Если подключить к источнику лампу и диод, соединив их последовательно, то мощность потерь на такой нагрузке будет равна $P_1 = 7,2$ Вт. Какой будет мощность, если в качестве нагрузки к источнику присоединить лампу и диод, соединенные параллельно?

11 класс

Задача 1. Колебания

По поверхности закреплённой диэлектрической полусферы равномерно распределён положительный электрический заряд. Ось симметрии полусферы вертикальна. В точке O , совпадающей с центром кривизны полусферы, закреплён математический маятник в виде небольшого шарика с зарядом q_1 , висящего на нити, длина которой меньше радиуса полусферы (рис. 9). Период гармонических колебаний шарика вблизи положения равновесия, в котором нить вертикальна, равен T . После того, как заряд шарика изменили так, что он стал равен q_2 , причем $|q_2/q_1| = 2$, период гармонических колебаний шарика вблизи нового положения равновесия, в котором нить тоже вертикальна, снова оказался равным T . Найдите числовое значение T , если известно, что период гармонических колебаний маятника в незаряженной чаше $T_0 = 1,0$ с. Поле поляризационных зарядов не учитывайте.

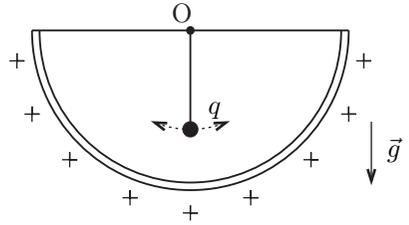


Рис. 9

Задача 2. Проводящий кубик

Кубик составлен из шести одинаковых проводящих пластин с просверленными по центру одинаковыми отверстиями. В вершины кубика вставлены одинаковые маленькие хорошо проводящие шарики, к которым можно присоединять провода. Диаметры отверстий таковы, что электрическое сопротивление кубика между его соседними вершинами A и B оказалось равным $R_{AB} = r = 32$ кОм. Если через эти вершины пропустить ток $I = 1$ мА в направлении, указанном на рисунке, то разность потенциалов между точкой M (серединой ребра AB) и вершиной C будет равна $U_{MC} = \varphi_M - \varphi_C = U = 2,0$ В. Определите сопротивление R_{AC} между точками A и C . Как изменятся сопротивления R_{AB} и R_{AC} , если, не изменяя толщину пластин, увеличить их размеры и размер отверстий в 2 раза?

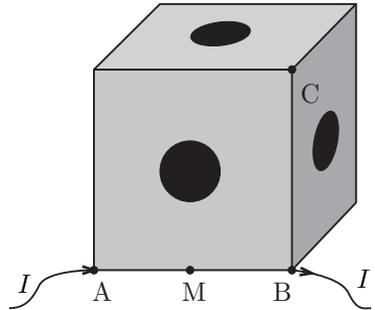


Рис. 10

Задача 3. Реактивная трубка

В середине длинной трубки, открытой с обоих концов, перпендикулярно к её оси закреплён нагреватель в виде тонкой вольфрамовой сеточки. Система находится в воздухе при температуре $t = 20^\circ\text{C}$, её общая масса $M = 17$ г. В начальный момент трубке сообщается скорость $v_0 = 1$ см/с вдоль её оси, к нагревателю начинает подводиться мощность $q = 20$ Вт, и трубка начинает разгоняться. Какой скорости достигнет трубка на пути разгона $S = 20$ м?

Сопротивлением воздуха пренебрегите. Давление внутри трубки считайте одинаковым, силу тяжести и теплообмен через стенку трубки не учитывайте. Считайте, что изменение кинетической энергии потока воздуха при пересечении сеточки мало по сравнению с изменением его внутренней энергии. Считайте воздух двухатомным газом с молярной массой $\mu = 29$ г/моль.

Задача 4. Космический объект

Космический объект, движущийся вдоль некоторой прямой с постоянной скоростью, испускает периодические радиоимпульсы. Астроном установил, что за время наблюдения Δt видимое направление на этот объект изменилось на малый угол $\Delta\varphi$, а период между моментами прихода радиоимпульсов изменился от T до $T + \Delta T$, где $\Delta T \ll T$. Найдите расстояние от наблюдателя до объекта. Скорость радиоимпульсов равна скорости света c .

Задача 5. «Миллиавтомобиль»

Очень маленький, размером с муравья, автомобиль, едет по ровной горизонтальной поверхности вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f . На его крыше закреплён точечный источник света S , находящийся на главной оптической оси линзы. Скорость автомобиля изменяется так, что скорость изображения S_1 точечного источника S остаётся постоянной и равной v_0 . Определите на каких расстояниях от линзы возможно такое движение «автомобиля». Коэффициент трения между колёсами автомобиля и дорогой равен μ .

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Разгон поезда

Первый способ (аналитический «со временем»). Пусть L — расстояние между соседними опорами, a — ускорение электрички. Исходя из условия задачи мы будем рассматривать два соседних участка 1–2 и 2–3 между соответствующими опорами 1, 2 и 3 (рис. 11). Условимся, что средняя скорость на участке 1–2 есть v_1 , а на участке 2–3, соответственно, v_2 . Пусть u_1 — мгновенная скорость в момент прохождения первой опоры, электричка проходит участок 1–2 за некоторое время t_1 , а участок 2–3 — за время t_2 .

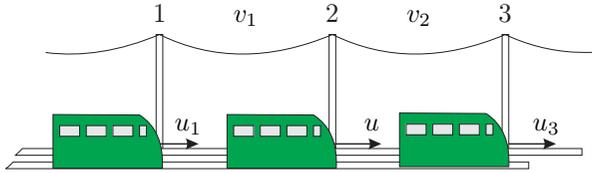


Рис. 11

Тогда из определения средней скорости на участке, его длину можно записать как

$$L = v_1 t_1 = v_2 t_2. \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку движение равноускоренное:

$$L = u_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (2)$$

$$L = ut_2 + \frac{at_2^2}{2}, \quad (3)$$

$$u = u_1 + at_1. \quad (4)$$

Умножая почленно (2) на v_1/t_1 и (3) на v_2/t_2 , затем, подставляя t_1 и t_2 из (1) и u_1 из (4) в (2) и (3), получаем

$$v_1^2 = uv_1 - \frac{aL}{2}, \quad v_2^2 = uv_2 + \frac{aL}{2}.$$

Избавляясь от L , выражаем скорость u и находим её численное значение:

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26 \text{ км/ч.} \quad (5)$$

Второй способ (графический). Используем обозначения первого способа, а также равенство (1).

Построим график зависимости скорости электрички от времени. С учетом равенства (1) и численных значений скоростей, движение на участке 1–2 длится в полтора раза дольше, чем на 2–3 (например 6τ и 4τ).

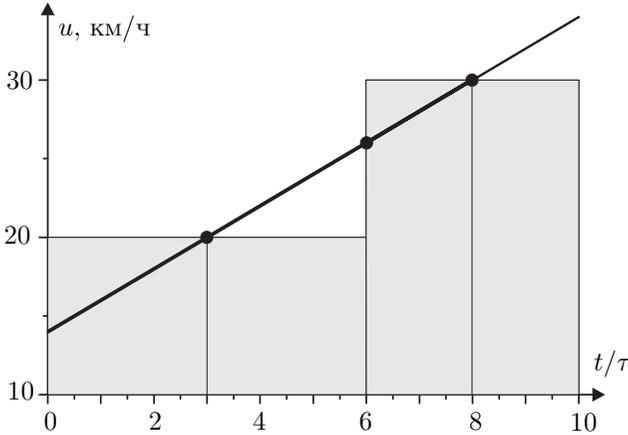


Рис. 12

Для любого участка при равноускоренном движении средняя скорость равна мгновенной скорости на середине временного интервала. Из графика следует, что изменение мгновенной скорости от 20 до 30 км/ч происходило за время 5τ . Откуда изменение скорости за 3τ равно 6 км/ч. Тогда искомая скорость 26 км/ч.

Третий способ (аналитический «без времени»). Используем обозначения первого способа. Пусть скорость на конце участка 2–3 равна u_3 . Средняя скорость при равноускоренном движении:

$$v_1 = \frac{u_1 + u}{2}, \tag{6}$$

$$v_2 = \frac{u + u_3}{2}. \tag{7}$$

Перемещения на участках равны:

$$L = \frac{u^2 - u_1^2}{2a}, \tag{8}$$

$$L = \frac{u_3^2 - u^2}{2a}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$u^2 - u_1^2 = u_3^2 - u^2. \tag{10}$$

Решая систему (6), (7) и (10) относительно u получаем:

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26 \text{ км/ч.} \quad (11)$$

Задача 2. Нажали и отпустили

Пусть s — расстояние, на которое переместился брусок за время действия силы F , а x — наибольшее сжатие пружины. Чтобы брусок остановился в исходной точке, работа сил трения при этом перемещении должна быть равна работе силы F на перемещении s :

$$Fs = 2fx. \quad (12)$$

Из того, что в момент наибольшего сжатия пружины скорость бруска равна 0, следует:

$$Fs = fx + \frac{kx^2}{2}, \quad (13)$$

где k — жёсткость пружины. Из уравнения (13) с учётом (12) находим

$$kx = 2f. \quad (14)$$

Из (12) и (14) получим

$$ks = \frac{4f^2}{F} \quad (15).$$

Сила давления тележки на стенку будет максимальна при максимальной деформации пружины (сила упругости максимальна, а сила трения ещё не изменила направления). Значит, значения силы давления на стенку в момент прекращения действия силы F и в момент, когда она максимальна, равны, соответственно,

$$N = ks + f = \frac{4f^2}{F} + f, \quad (16)$$

$$N_{\max} = kx + f = 3f. \quad (17)$$

Задача 3. Жара в холодильнике

Пусть P — мощность поступающей за счёт теплообмена из окружающей среды теплоты, $P = \alpha(t - t_0)$, P_0 — мощность отводимой за счёт работы холодильника теплоты, C — теплоёмкость холодильника с содержимым.

1. Для нагрева холодильника на Δt требуется время T (время бездействия):

$$T = \frac{C\Delta t}{P} = \frac{C\Delta t}{\alpha(t_0 - t)}. \quad (18)$$

Далее включается двигатель и температура в холодильнике понижается на Δt за время τ (время работы):

$$\tau = \frac{C\Delta t}{P_0 - P} = \frac{C\Delta t}{P_0 - \alpha(t_0 - t)}. \quad (19)$$

Пусть изначально температура в холодильнике была равна $t = t_1$, при этом $\tau = 2T$, откуда, с учётом (18) и (19) получим:

$$t_1 = t_0 - \frac{2P_0}{3\alpha}.$$

Во втором случае $2\tau = T$ при $t = t_2$, откуда с учётом (18) и (19) получим:

$$t_2 = t_0 - \frac{P_0}{3\alpha}.$$

Тогда $\theta = t_2 - t_1 = P_0/(3\alpha)$, откуда

$$t_1 = t_0 - 2\theta = 12^\circ\text{C}, \quad t_2 = t_0 - \theta = 21^\circ\text{C}.$$

2. Двигатель холодильника будет работать непрерывно, если мощность отводимой им теплоты будет меньше или равна мощности теплоты, подводимой из окружающей среды:

$$P_0 \leq \alpha(t_0 - t), \quad \text{откуда} \quad t \leq t_0 - \frac{P_0}{\alpha},$$

значит,

$$t_m = t_0 - \frac{P_0}{\alpha} = t_0 - 3\theta = 3^\circ\text{C}.$$

3. В решении первого пункта задачи было показано, что время между двумя последовательными включениями холодильника равно

$$T + \tau = \frac{C\Delta t}{P} + \frac{C\Delta t}{\alpha(t_0 - t)} = \frac{C\Delta t P_0}{\alpha(t_0 - t)(P_0 - \alpha(t_0 - t))}.$$

Частота включения холодильника максимальна, когда максимальна величина $y = \alpha(t_0 - t)(P_0 - \alpha(t_0 - t))$. Для удобства обозначим $(t_0 - t)$ за x . График $y(x) = \alpha P_0 x - \alpha^2 x^2$ — парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому y максимально для вершины параболы. Координата вершины параболы $x_v = P_0/(2\alpha)$, значит,

$$t_3 = t_0 - \frac{P_0}{2\alpha} = t_0 - \frac{3}{2}\theta = 16,5^\circ\text{C}.$$

Задача 4. Неидеальные диоды

Рассмотрим случай, когда «+» источника подключается к точке А. Напряжение U_{AB} в этом случае будем считать положительным. Если напряжение на

диоде меньше величины U_0 , ток через него не идет (диод закрыт). При малых значениях U_{AB} все три диода закрыты, а ток, протекающий через резисторы, равен

$$I_A = \frac{U_{AB}}{3R}. \quad (1)$$

и течет от D к C . При построении графика $I_A(U_{AB})$ это направление тока будем считать положительным. Зависимость (1) имеет место, пока напряжение на диоде D_1 не достигнет U_0 , т.е. при

$$U_{DB} = I_A \cdot 2R < U_0,$$

или $U_{AB} < \frac{3}{2}U_0$. Итак, $I_A = \frac{U_{AB}}{3R}$ при $U_{AB} < \frac{3}{2}U_0$.

При $U_{AB} = 3U_0/2$ диод D_1 открывается, и, как следует из вольтамперной характеристики диода, напряжение на участке DB будет равно U_0 при любых значениях напряжения $U_{AB} > 3U_0/2$. Поэтому, пока не откроются диоды D_2 и D_3 , ток через амперметр положителен и равен

$$I = \frac{U_0}{2R}$$

Диоды D_2 и D_3 открываются, когда напряжение на участке AC станет равным $2U_0$. А поскольку напряжение на участке CB при открытом диоде D_1 равно $U_0/2$, то открывание диодов D_2 и D_3 произойдет при напряжении $U_{AB} = 2U_0 + U_0/2 = 5U_0/2$. При этом разность потенциалов на участке AC равна $2U_0$, а на участке DB U_0 . Следовательно, напряжение U_{DC} при открытых диодах равно

$$U_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \varphi_B + U_0 - (\varphi_A - 2U_0) = \varphi_B - \varphi_A + 3U_0 = 3U_0 - U_{AB},$$

где $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ и φ_D – потенциалы точек A, B, C и D соответственно. Поэтому ток через амперметр при открытых диодах равен

$$I_A = \frac{3U_0}{R} - \frac{U_{AB}}{R}. \quad (2)$$

Ток (2) при напряжении $U_{AB} = 5U_0/2$ совпадает с током до открывания диодов D_2 и D_3 . Это значит, что зависимость тока через амперметр от U_{AB} при $U_{AB} > 5U_0/2$ – линейная убывающая функция, не имеющая разрыва в точке $U_{AB} = 5U_0/2$, с угловым коэффициентом наклона по модулю втрое большим, чем на участке $U < 3U_0/2$.

В случае, когда «+» источника подключен к B т.е. $U_{AB} < 0$, все диоды закрыты, и ток течет через три последовательно соединенных резистора. Его величина $I_A = \frac{U_{AB}}{3R}$, при этом $I_A < 0$. График зависимости I_A от U_{AB} приведен на рисунке 13:

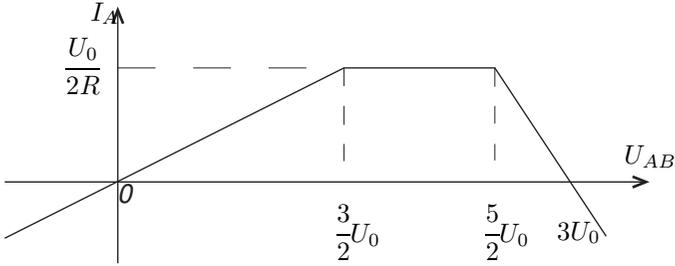


Рис. 13

Ответ:

$$\begin{aligned}
 I_A &= \frac{U_{AB}}{3R} && \text{при } U_{AB} < \frac{3}{2}U_0, \\
 I_A &= \frac{U_0}{2R} && \text{при } \frac{3}{2}U_0 < U_{AB} < \frac{5}{2}U_0, \\
 I_A &= \frac{3U_0 - U_{AB}}{R} && \text{при } U_{AB} > \frac{5}{2}U_0.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Чунга-Чанга

Чебурашка и Гена видят, как Солнце перемещается с востока на запад с угловой скоростью

$$\omega = \frac{360^\circ}{24 \text{ ч}} = 15^\circ/\text{ч}.$$

Как следует из рисунка 14, Солнце видно из окон крокодила Гены от полудня, когда Солнце в зените, до времени, когда оно скроется за корпусом Чебурашки. При этом оно сместится на угол

$$\alpha = \omega T_1 = 30^\circ.$$

По аналогии найдём, что за время, пока Солнце светило в окно Чебурашки, оно сместилось на угол

$$\beta = \omega T_2 = 60^\circ.$$

Пусть высота одного этажа равна h , номер этажа на котором живёт Чебурашка n , а расстояние между корпусами вдоль экватора, соответственно, L . Тогда, исходя из рисунка 14, мы можем записать два уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{(100 - 10)h} &= \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
 \frac{L}{(100 - n)h} &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Из них находим номер этажа, на котором жил Чебурашка:

$$n = 100 - 90 \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 70.$$

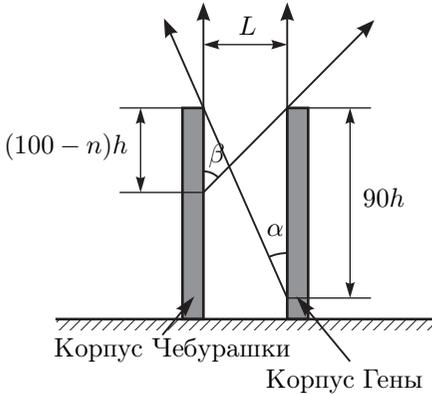


Рис. 14

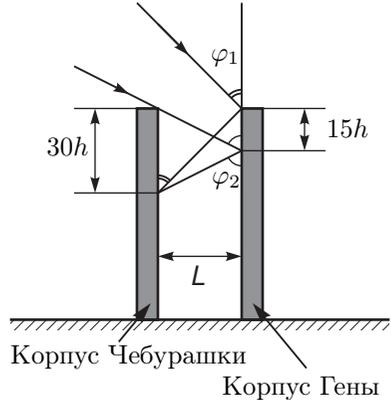


Рис. 15

Заметим, что в полдень (в 12 часов) Солнце находится строго в зените. Через некоторое время t_1 окна в корпусе Гены стали казаться Чебурашке золотыми. Это произошло тогда, когда прямые солнечные лучи, отраженные от окон верхнего этажа корпуса Гены, попали в окно Чебурашки (рис. 15). За время t_1 Солнце опустилось угол φ_1 такой, что

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L}{30h} = \sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_1 = 60^\circ.$$

Значит, $t_1 = \varphi_1/\omega = 4$ ч, и часы Чебурашки показывали 16 часов в момент, когда окна корпуса Гены стали казаться золотыми.

Пусть через время t_2 после полудня окна перестали казаться золотыми. В этот момент луч от Солнца, отражающийся от корпуса Гены и попадающий в окно Чебурашки, проходит через край корпуса Чебурашки. Найдём угол φ_2 , который в этот момент будет составлять Солнце с вертикалью:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L}{15h} = 2\sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad \varphi_2 \approx 73,9^\circ.$$

Значит, $t_2 = \varphi_2/\omega \approx 4,93$ ч. Окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми в течение 56 минут.

10 класс

Задача 1. Упругая система

Из условия следует, что сумма сил натяжения пружин всегда равна F , растяжения пружин в начальный момент одинаковы и равны $x_0 = F/k$, где $k = k_1 + k_2$, суммарная начальная энергия пружин $E_0 = F^2/2k$.

1. В момент, когда скорость груза максимальна, его ускорение равно нулю, значит первая пружина недеформирована, а вторая растянута силой F . Приравнявая работу силы F изменению энергии системы, получим

$$F \left(\frac{F}{k_2} - \frac{F}{k} \right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{F^2}{2k_2} - \frac{F^2}{2k},$$

откуда максимальная скорость груза:

$$v = F \sqrt{\frac{k_1}{mk_2(k_1 + k_2)}}.$$

2. Так как сумма сил натяжения пружин постоянна, минимальность одной из них означает максимальность другой, поэтому в момент минимального удлинения одной из пружин скорость изменения длины будет нулевой у обеих пружин, а значит, будет равна нулю и скорость груза. Тогда для растяжений пружин x_1 и x_2 в этот момент получим систему уравнений:

$$\begin{cases} k_1x_1 + k_2x_2 = F, \\ F(x_2 - x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2}. \end{cases}$$

Решение системы существенно облегчается, если заметить, что начальные значения растяжений $x_1 = x_2 = x_0$ должны ей удовлетворять, так как скорость груза в начальный момент равна нулю. Второе решение

$$x_1 = -x_0, \quad x_2 = x_0 \frac{2k_1 + k_2}{k_2}.$$

Таким образом удлинение первой пружины в момент, когда её длина будет минимальна, равно

$$x_1 = -\frac{F}{k_1 + k_2}.$$

Отрицательный знак означает, что пружина в этот момент будет сжата.

Задача 2. Исследование планеты

Рассмотрим участок атмосферы площадью поперечного сечения S , находящийся между слоями с координатами z и $z + \Delta z$. На него действуют: снизу — сила давления $p(z)S$, сверху — сила давления $p(z + \Delta z)S$; также действует направленная вниз сила тяжести $\rho S \Delta z g$, где ρ — плотность воздуха на данной высоте. Так как атмосфера находится в равновесии, сумма сил, приложенных к рассматриваемому участку, равна 0:

$$(p(z) - p(z + \Delta z))S - \rho S \Delta z g = 0$$

Перепишем данное уравнение в виде $\Delta p = -\rho g \Delta z$, где $\Delta p = p(z + \Delta z) - p(z)$. Учитывая, что температура атмосферы T выражается через давление, плотность, молярную массу μ и универсальную газовую постоянную R соотношением $p = \frac{\rho}{\mu} RT$, получим:

$$T = \frac{p}{-\Delta p / \Delta z} \frac{\mu g}{R}$$

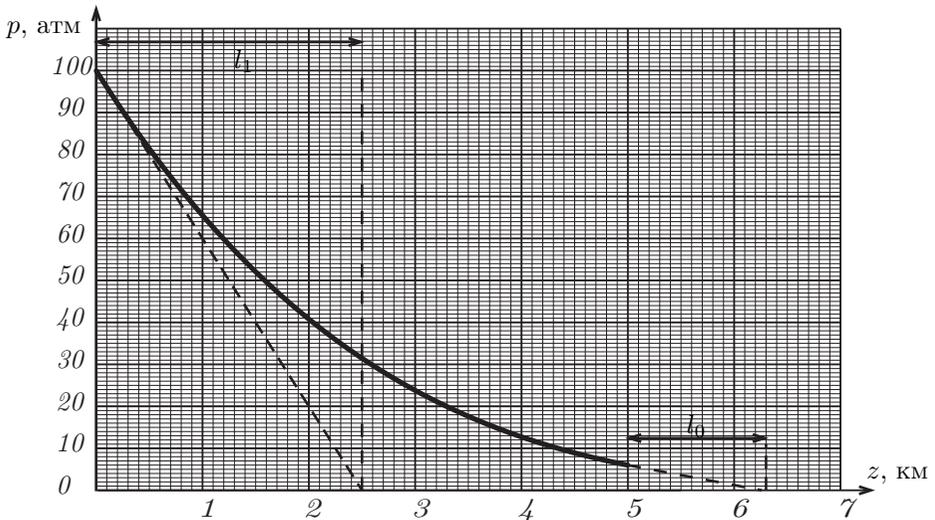


Рис. 16

Величины μ и g можно считать постоянными: атмосферу считаем состоящей из углекислого газа, g считаем постоянным, так как радиус планеты много больше величины перемещения спускаемого аппарата. Следовательно, температура пропорциональна величине:

$$T \propto \frac{p}{\Delta p / \Delta z}.$$

Это выражение при $z = 0$ и $z = 5$ км можно найти графически: провести касательную к графику и отметить точку пересечения касательной с горизонтальной осью. Учитывая, что $l_0 = 2,5$ км, $l_1 = 1,25$ км, для температуры T_0 у поверхности планеты получим $T_0 = T_1 l_0 / l_1 = 680 \pm 40$ К. Ответ записан с погрешностью, так как касательные проводятся с некоторой точностью. Нахождение погрешностей не требовалось и не оценивается.

Задача 3. Термoeлектродинамика

Обозначим через V , P и T начальные значения объёма, давления и температуры газа, d — начальное расстояние между дисками, а те же величины с индексом 1 — те же параметры в конечном состоянии. Так как расстояние между дисками много меньше их радиуса, напряжённость поля диска можно вычислять, считая его равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S},$$

где S — площадь дисков.

Тогда на второй диск со стороны первого действует сила $F = qE$:

$$F = qE = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Сила пропорциональна квадрату заряда и не зависит от расстояния между пластинами, поэтому конечное равновесное давление будет в четыре раза меньше начального.

Энергия конденсатора равна

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = Fd = PV.$$

Рассмотрим систему, состоящую из газа и заряженных пластин. Её энергия равна

$$W = PV + \frac{3}{2}PV = \frac{5}{2}PV = \frac{5}{2}\nu RT.$$

Энергия системы в конечном равновесном состоянии должна равняться начальной энергии:

$$\frac{5}{2}P_1 V_1 = \frac{3}{2}PV + \frac{P}{4}V, \quad \text{откуда} \quad \frac{5}{2}\nu RT_1 = \frac{7}{4}\nu RT, \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{7}{10}T.$$

Теперь, используя $P_1 = P/4$:

$$\frac{P_1 V_1}{PV} = \frac{T_1}{T} = \frac{7}{10}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d_1}{d} = \frac{V_1}{V} = \frac{14}{5}.$$

Полученный ответ подтверждает предположение о малости d в конечном состоянии.

Задача 4. Стенка с дыркой

При упругом ударе бруска 1 о стену изменяется направление его скорости при сохранении величины скорости. В этот момент времени скорости равны $v_1 = -v$, $v_2 = v_3 = v$ (рис. 17).

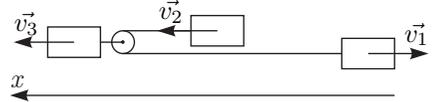


Рис. 17

1. Резинка будет максимально натянутой, когда скорость увеличения её длины станет равна нулю. Эту скорость можно выразить через скорости брусков в момент максимального растяжения:

$$v_{\text{растяжения}} = 2v_3 - v_2 - v_1 = 0. \quad (20)$$

На систему не действуют внешние силы, поэтому, из закона сохранения импульса следует:

$$v_3 + v_2 + v_1 = v. \quad (21)$$

Запишем второй закон Ньютона для первого и второго брусков:

$$m \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = T, \quad m \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = T.$$

Отсюда видно, что изменение скоростей первого и второго бруска в любой момент времени связано соотношением $\Delta v_1 = \Delta v_2$, а значит, и суммарные изменения скоростей связаны таким же образом:

$$v_2 - v = v_1 - (-v). \quad (22)$$

Из трех уравнений (20), (21), (22) получаем значения скоростей в момент времени, когда резинка максимально растянута

$$v_1 = -\frac{2}{3}v, \quad v_2 = \frac{4}{3}v, \quad v_3 = \frac{1}{3}v.$$

2. Обозначим скорости брусков в момент времени, когда резинка снова не натянута, как v_1 , v_2 , v_3 . Закон сохранения импульса (21) и связь между скоростями v_1 и v_2 (22) остаются прежними.

Условием того, что резинка не натянута, является равенство нулю потенциальной энергии резинки. Из закона сохранения энергии следует:

$$3v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (23)$$

Из уравнений (21), (22), (23) получаем два решения. Первое решение:

$$v_1 = -v, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v,$$

соответствует начальной ситуации, которая больше не повторится.

Второе решение:

$$v_1 = -\frac{1}{3}v, \quad v_2 = \frac{5}{3}v, \quad v_3 = -\frac{1}{3}v,$$

является ответом на второй вопрос задачи.

Задача 5. Нелинейность

Сначала установим, при каком требовании к нагрузке мощность потерь максимальна для данного источника. Пусть ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны соответственно \mathcal{E} и r , а сила тока, протекающего через нагрузку равна I . Тогда мощность потерь $P_{\text{н}} = IU_{\text{н}} = I(\mathcal{E} - Ir)$. В зависимости от сопротивления нагрузки R сила тока может изменяться от нуля (если R бесконечно велико) до тока короткого замыкания источника $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$ (при $R = 0$). Легко заметить, что максимум $P_{\text{н}}$ соответствует $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{2r} = \frac{I_0}{2}$ (это координата вершины параболы – графика функции $P_{\text{н}}(I)$). В этом случае сопротивление нагрузки $R = r$, а напряжение $U_{\text{н}} = IR = \frac{\mathcal{E}}{2}$. Значит, при таком напряжении сила тока, протекающего и через лампу, и через диод равна $\frac{I_0}{2}$, и связь тока с напряжением для них дается выражениями:

$$I_{\text{л}} = \frac{I_0}{2} \sqrt{\frac{2U_{\text{л}}}{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{I_0 U_{\text{л}}}{2r}}, \quad I_{\text{д}} = \frac{I_0}{2} \left(\frac{2U_{\text{д}}}{\mathcal{E}} \right)^2 = \frac{2U_{\text{д}}^2}{I_0 r^2}.$$

Обратные выражения:

$$U_{\text{л}} = \frac{2r}{I_0} I_{\text{л}}^2, \quad U_{\text{д}} = r \sqrt{\frac{I_0 I_{\text{д}}}{2}}.$$

Далее можно действовать двумя путями:

Первый способ (алгебраический):

Запишем для последовательного подключения уравнение для напряжения на нагрузке (общий ток через диод и лампу обозначим I_1):

$$\mathcal{E} - I_1 r = (I_0 - I_1)r = U_{\text{л}}(I_1) + U_{\text{д}}(I_1) = \frac{2r}{I_0} I_1^2 + r \sqrt{\frac{I_0 I_1}{2}}$$

Если в этом уравнении сделать подстановку $I_1 = I_0 x$, то для x получится уравнение $1 - x = 2x^2 + \sqrt{\frac{x}{2}}$. Оно сводится к уравнению четвертой степени, но решать его не нужно. Отметим только, что в левой части стоит монотонно убывающая функция от x , а в правой – монотонно растущая при $x > 0$. Поэтому в этой области данное уравнение имеет один корень. Запишем теперь также уравнение для параллельного подключения (ток источника I_2):

$$\mathcal{E} - I_2 r = (I_0 - I_2)r = U_{\text{л}}(I_{\text{л}}) = U_{\text{д}}(I_{\text{д}}) = \frac{2r}{I_0} I_{\text{л}}^2 = r \sqrt{\frac{I_0 I_{\text{д}}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} I_{\text{л}} = \sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_2)}{2}} \\ I_{\text{д}} = \frac{2(I_0 - I_2)^2}{I_0} \end{cases}$$

и при этом $I_2 = I_n + I_d = \sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_2)}{2}} + \frac{2(I_0 - I_2)^2}{I_0}$. Это уравнение для I_2 , в котором можно сделать подстановку $I_2 = I_0(1 - y)$, и тогда $1 - y = 2y^2 + \sqrt{\frac{y}{2}}$. Это уравнение ничем не отличается от уравнения для x , и у него один корень. Значит, $y = x$, или $I_1 + I_2 = I_0$! Заметим, что мощность потерь в первом случае $P_1 = I_1(\mathcal{E} - I_1 r) = r I_1(I_0 - I_1)$, а во втором: $P_2 = I_2(\mathcal{E} - I_2 r) = r I_2(I_0 - I_2) = r(I_0 - I_1)I_1 = P_1 = 7,2$ Вт.

Второй способ (графический): Построив графики вольтамперных характеристик (ВАХ) лампы и диода, можно графически построить и графики ВАХ двух нагрузок, соответствующих последовательному и параллельному соединению (рисунки 1, 2).

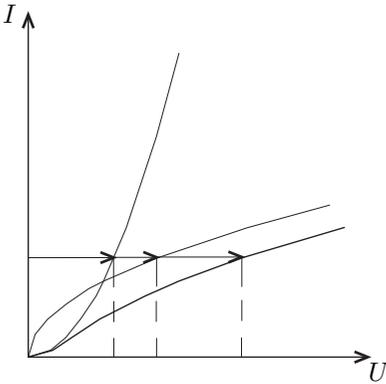


Рис. 18

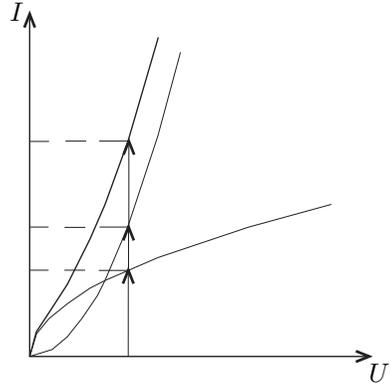


Рис. 19

Если в качестве единиц масштабов по осям тока и напряжения выбрать соответственно I_0 и \mathcal{E} , и построить их на одном графике (рисунок 3), то они будут симметричны относительно биссектрисы координатного квадранта. Токи через источник для каждой из нагрузок (I_1 и I_2) определяются решением уравнения $U(I) = \mathcal{E} - I r$, то есть пересечением на графике 3 ВАХ нагрузки с прямой $\frac{U}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{I}{I_0}$, которая также обладает указанной симметрией, поэтому точки пересечения расположены также симметрично, и поэтому:

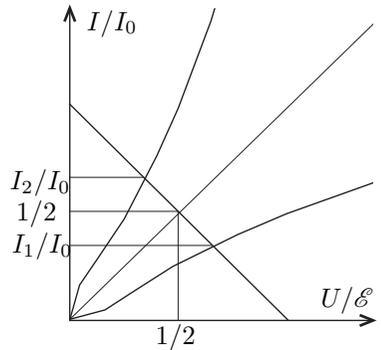


Рис. 20

$$\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} = 1 \Rightarrow I_1 + I_2 = I_0$$

Теперь снова легко обнаружить, что: $P_2 = I_2(\mathcal{E} - I_2 r) = r I_2(I_0 - I_2) = r(I_0 - I_1)I_1 = P_1 = 7,2$ Вт. Окончательно, $P_2 = P_1 = 7,2$ Вт.

11 класс

Задача 1. Колебания

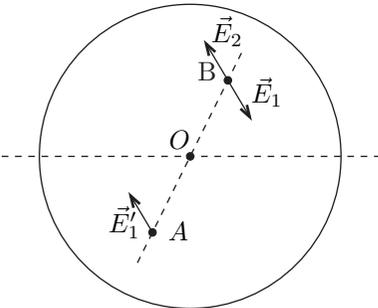


Рис. 21

Известно, что напряженность электростатического поля внутри равномерно заряженной сферы равна нулю. Поле в некоторой точке A складывается из полей, создаваемых верхней и нижней половинами сферы:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0. \quad (1)$$

Пусть точка B симметрична точке A относительно центра сферы (рис. 21). Из соображения симметрии напряженность поля, создаваемого в точке A нижней половиной сферы, равна по модулю и противоположна по направлению полю, создаваемому в точке B верхней половиной сферы:

$\vec{E}'_1 = -\vec{E}_1$. Тогда по формуле (1) получим $\vec{E}'_1 = \vec{E}_2$, то есть величины напряженности поля, создаваемого однородно заряженной полусферой в симметричных относительно ее центра точках, равны.

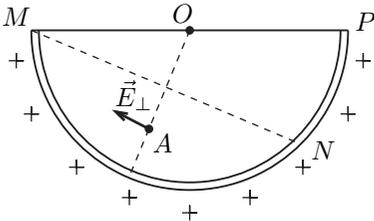


Рис. 22

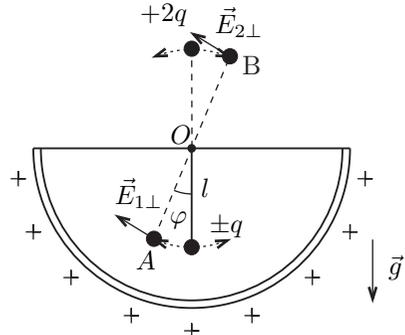


Рис. 23

Определим направление составляющей поля, перпендикулярной нити маятника, в точке A (рис. 22). Проведем плоскость, перпендикулярную нити маятника, проходящую через левый край сферы. Тогда часть MN сферы создает поле, параллельное нити маятника. Составляющая поля, перпендикулярная нити маятника, создается только оставшейся частью полусферы, следовательно большая часть заряда, создающего это поле, расположена в части полусферы, более удаленной от точки A ; значит, составляющая поля направлена в сторону смещения маятника.

После изменения заряда шарика его положение равновесия должно располагаться выше точки подвеса, так как иначе невозможно равенство старого и нового периодов. Когда шарик расположен выше точки подвеса, при его смещении от положения равновесия возвращающая сила может возникнуть

только за счет электростатического взаимодействия, следовательно должно быть $q_2 > 0$ (рис. 23).

В нижней точке при отклонении маятника на небольшой угол φ от положения равновесия возникает возвращающая сила f_1 . Вклад в эту силу за счет электрического взаимодействия заряда с чашей пропорционален величине заряда и углу отклонения, поэтому:

$$f_1 = (\alpha q_1 - mg)\varphi.$$

В верхней точке (заряд шарика q_2) возвращающая сила равна:

$$f_2 = (-\alpha q_2 + mg)\varphi.$$

Соответствующие уравнения колебаний имеют вид (здесь l — длина нити маятника):

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} + (mg - \alpha q_1)\varphi &= 0 \quad \text{для нижней точки,} \\ ml\ddot{\varphi} + (\alpha q_2 - mg)\varphi &= 0 \quad \text{для верхней точки.} \end{aligned}$$

Тогда частоты колебаний вблизи нижнего и верхнего положений равновесия будут равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \beta q_1, \\ \omega_2^2 &= -\omega_0^2 + \beta q_2, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = g/l$ — частота колебаний в незаряженной полусфере, $\beta = \alpha/(ml)$ — константа.

Условие задачи может реализовываться в двух случаях: $q_1 > 0$ и $q_1 < 0$. В обоих случаях шарик вначале колеблется вблизи нижнего, а затем вблизи верхнего положения равновесия.

Случай 1

Рассмотрим случай $q_1 > 0$. Тогда $q_2 = 2q_1$.

По условию $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, следовательно, получаем

$$\omega_0^2 - \beta q_1 = -\omega_0^2 + 2\beta q_1, \quad \text{отсюда} \quad \beta q_1 = \frac{2}{3}\omega_0^2$$

Следовательно $\omega^2 = \frac{1}{3}\omega_0^2$ и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0\sqrt{3} = 1,73 \text{ с.}$$

Здесь $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ — период колебаний маятника в незаряженной полусфере.

Случай 2

Рассмотрим случай $q_1 < 0$. Тогда $q_2 = -2q_1$.

Аналогично случаю 1 приравниваем значения частот ω_1 и ω_2 , находим $\beta q_1 = -2\omega_0^2$. Отсюда $\omega^2 = 3\omega_0^2$ и период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{3}} = 0,58 \text{ с.}$$

Задача 2. Проводящий кубик

Примем потенциал вершины В за ноль. При пропускании через вершины А и В тока I , из соображений симметрии, получим, что потенциал точки М равен

$$\varphi_M = \frac{1}{2}\varphi_A = \frac{1}{2}Ir,$$

а разность потенциалов

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = (\varphi_A - \varphi_M) + (\varphi_M - \varphi_C) = \frac{1}{2}Ir + U.$$

Пусть через вершину В ток I в обратном направлении, так, чтобы скомпенсировать выходящий из неё ток I , и выведем этот ток через вершину С. Для этого придётся на вершину С подать потенциал, равный

$$\varphi_C = -\left(\frac{1}{2}Ir + U\right).$$

Напомним, что $\varphi_B = 0$. Разность потенциалов между вершинами А и С окажется равной

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = 2\left(\frac{1}{2}Ir + U\right) = 2U + Ir.$$

По принципу суперпозиции, ток I будет входить в вершину А, а выходить и из вершины С (из вершины В ток не выходит и не входит). По закону Ома:

$$R_{AC} = \frac{U_{AC}}{I} = \frac{2U}{I} + r = 36 \text{ кОм.}$$

Пусть длина ребра куба равна a , толщина пластины — d . Заметим, что сопротивление куба $R \sim L/S \sim a/ad = 1/d$ — не зависит от длины a стороны квадрата, где $L \sim a$ — характерный размер, а $S \sim ad$ — характерное поперечное сечение пластины при расчёте сопротивления кубика. Следовательно, при изменении длины стороны квадратной пластины и неизменной её толщине d , сопротивление пластины не изменится.

Задача 3. Реактивная трубка

Такая трубка с нагревателем представляет собой реактивный двигатель, принцип работы которого аналогичен принципу работы водомётного катера. Действительно, из-за нагрева и, соответственно, расширения, скорость горячего воздуха на выходе из трубки оказывается больше скорости холодного воздуха на входе в трубку. В результате возникает реактивная сила, разгоняющая трубку. Найдём выражение для этой реактивной силы тяги. В системе отсчета, связанной с трубкой, поток воздуха с небольшой скоростью продувается через трубу с нагревателем в виде сетки. (Кстати, это стандартная лабораторная установка для измерения теплоёмкости газов C_p при постоянном давлении). Найдём изменение температуры воздуха. Пренебрегая изменением кинетической энергии потока воздуха, запишем закон сохранения энергии для массы m газа, протекающего через трубку в единицу времени. Если этот воздух в холодном состоянии занимал объём V_1 , а в горячем V_2 , то по первому началу термодинамики подведённая к газу за единицу времени теплота q расходуется на изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и работу газа против внешнего давления $A = P(V_2 - V_1)$: $q = \Delta U + A$, или

$$\begin{aligned} q &= U_2 - U_1 + PV_2 - PV_1 = (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) = \\ &= \frac{m}{\mu} \left((C_V T_2 + RT_2) - (C_V T_1 + RT_1) \right) = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T, \end{aligned}$$

где $C_V = 5R/2$ — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, $C_P = C_V + R = 7R/2$ молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — универсальная газовая постоянная, T_2 и T_1 — температуры воздуха на выходе и на входе в трубку, соответственно. Если скорость холодного воздуха v , а изменение скорости течения воздуха Δv , то реактивная сила:

$$F_p = m \Delta v = \frac{mv \Delta v}{v} = \frac{mv \Delta T}{T} = \frac{v \mu q}{C_P T} = \beta v.$$

Сила тяги оказывается пропорциональной скорости движения трубки. Коэффициент пропорциональности:

$$\beta = \frac{\mu q}{C_P T} = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с}.$$

По закону Ньютона:

$$M dv = F_p dt = \beta v dt = \beta dS, \quad \text{следовательно,} \quad M \Delta v = \beta S.$$

Окончательно, $v = v_0 + \frac{\beta S}{M} = 9 \text{ см/с}$.

Задача 4. Космический объект

При угле φ между направлением движения объекта и направлением к наблюдателю посланные через время T_0 импульсы будут приниматься наблюдателем через промежуток времени $T = T_0(1 + (v/c) \cos \varphi)$, где v - скорость объекта.

В самом деле, если из точки А испущен первый импульс, то следующий импульс испускается через время T_0 из точки В на расстоянии vT_0 . Пути к наблюдателю почти параллельны, а разница их составляет отрезок $BC = AB \cos \varphi = vT_0 \cos \varphi$ (рис. 24), проходимый за дополнительное время $(vT_0 \cos \varphi)/c$, где c - скорость света. В сумме с T_0 это и дает выражение для T . Пока угол φ можно считать почти постоянным, такое же соотношение будет верным для любых промежутков времени Δt_0 при испускании сигналов и Δt при их приеме:

$$\Delta t = \Delta t_0(1 + (v/c) \cos \varphi).$$

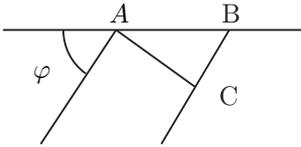


Рис. 24

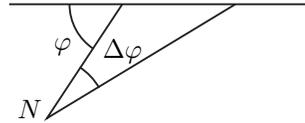


Рис. 25

Теперь вычислим приращение периода при приеме при изменении угла φ на $\Delta\varphi$ (если из направление точки N (наблюдатель) к космическому объекту повернулось на угол $\Delta\varphi$, то начальный угол переходит в угол $\varphi - \Delta\varphi$ (рис. 25)):

$$\Delta T = \left| \frac{dT}{d\varphi} \right| \Delta\varphi = T_0 \frac{v}{c} \sin \varphi \Delta\varphi$$

($v \sin \varphi$ это составляющая скорости, перпендикулярная к радиусу вектору).

Тогда при времени перемещения Δt_0 , отвечающему времени наблюдения Δt имеем $\Delta\varphi = v\Delta t_0 \sin \varphi / r$, где r - искомое расстояние. Исключая скорость из выражения для ΔT , получим:

$$\Delta T = T_0(\Delta\varphi)^2 r / c \Delta t_0 = T(\Delta\varphi)^2 r / c \Delta t$$

поскольку $T_0/T = \Delta t_0/\Delta t$. Окончательно получаем:

$$r = \frac{c\Delta T\Delta t}{T(\Delta\varphi)^2}.$$

Поскольку рассмотрение проводилось только в системе отсчёта наблюдателя, то результаты применимы в общем случае, а не только при скоростях объекта $v \ll c$.

Задача 5. «Миллиавтомобиль»

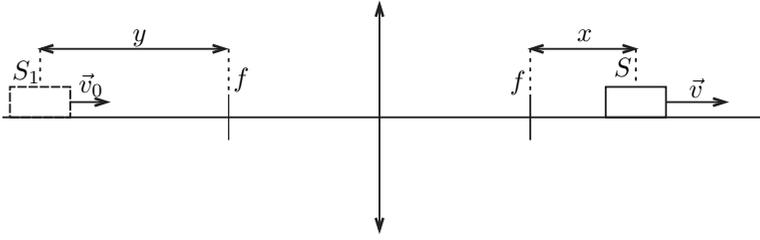


Рис. 26

Если расстояние от источника S до переднего фокуса линзы равно x , а от его изображения до заднего фокуса y , то по формуле тонкой линзы в форме Ньютона ($xy = f^2$) для малых перемещений Δx и Δy получим:

$$x\Delta y + y\Delta x = 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{v}{v_0} = -\frac{x}{y} = -\frac{xy}{y^2} = -\frac{f^2}{y^2}.$$

отсюда скорость автомобиля: $v = -v_0 f^2 / y^2$. Знак «-» означает, что если автомобиль удаляется от фокуса (x растет, то есть $v > 0$), его изображение приближается к фокусу (y уменьшается, $v_0 < 0$). Ускорение автомобиля:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\frac{v_0 f^2}{y^3} \frac{dy}{dt} = 2\frac{v_0^2 f^2}{y^3} = 2\frac{v_0^2 x^3}{f^4}.$$

Это ускорение не может превышать (по модулю) значения $a_{max} = \mu g$. Следовательно, получаем неравенство:

$$\frac{2v_0^2 |x|^3}{f^4} \leq \mu g, \quad \text{откуда} \quad |x| \leq f \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}},$$

т.е. автомобиль не может удалиться от фокуса на расстояние большее, чем $f \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}$. Следовательно, расстояние l от автомобиля до линзы может изменяться в пределах:

$$f \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}} \right) \leq l < f \quad \text{или} \quad f < l \leq f \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}} \right).$$

Изображение может быть как мнимым ($l < f$), так и действительным ($l > f$).

Если $v_0 < \sqrt{\frac{\mu g f}{2}}$, то

$$0 < l < f \quad \text{или} \quad f < l \leq f \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}} \right).$$

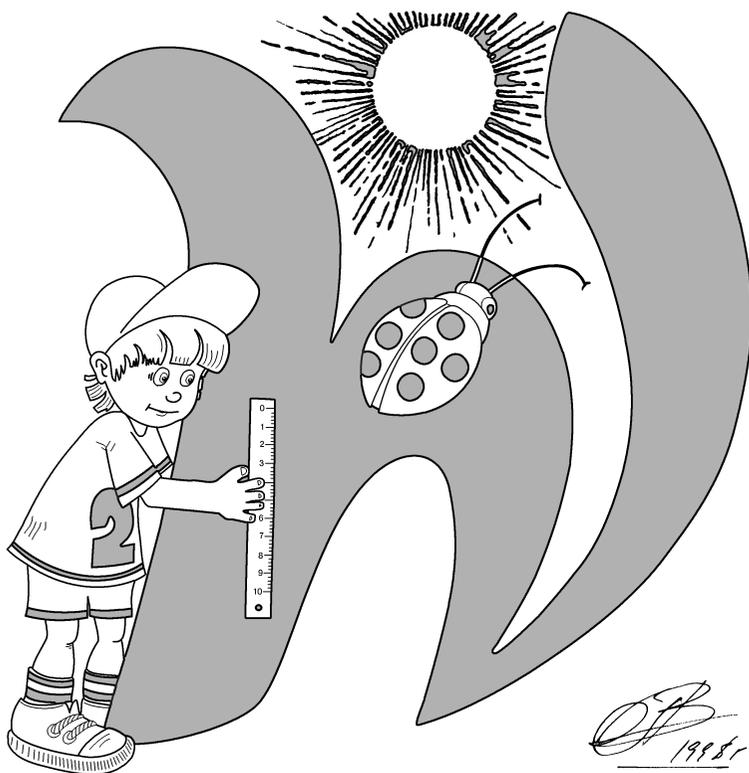
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Экспериментальный тур

Методическое пособие



Екатеринбург, 2015 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.

E-mail: physolymp@gmail.com

Сайт физических олимпиад школьников: physolymp.ru

Авторы задач

9 класс

1. Воронов А.,
Гуденко А.
2. Осин М.,
Кармазин С.

10 класс

1. Лящев А.,
Осин М.
2. Варламов С.,
Слободянин В.

11 класс

1. Гуденко А.

Общая редакция — Слободянин В.

При подготовке оригинал-макета использовалась издательская система \LaTeX 2 ϵ .

© Авторский коллектив
141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Песочные часы

Часть 1. Масса песка.

1.1. (1 балл) Исследуйте, зависит ли массовый расход μ (кг/с) песка в песочных часах от высоты h столба песка в верхней колбе (рис. 1). Сделайте вывод.

1.2. (4 балла) Определите массу m песка внутри песочных часов. Обратите внимание на то, что колбы песочных часов имеют разную длину. Колбы часов можно считать цилиндрическими.

Внимание! Следует аккуратно обращаться с песочными часами, не сломать узкую горловину, соединяющую верхнюю и нижнюю колбы. Пластмассовые опоры снимать можно. За поломку колбы часов снимается **5 баллов** и новые часы не выдаются!

Часть 2. Скорость хода часов. В этой части эксперимента вы работаете с моделью песочных часов, собранных вами.

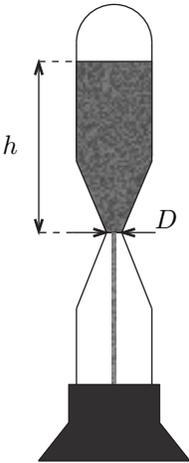


Рис. 1

2.1. (2 балла) Предположим, что массовый расход песка μ зависит только от его плотности ρ , ускорения свободного падения g , высоты h столба песка, и разности $(D - d)$, где D — диаметр отверстия в пробке, d — параметр, зависящий от свойств песка, C — безразмерная константа. Методом размерностей и по результатам предыдущего опыта определите коэффициенты α , β , γ , δ в формуле:

$$\mu = C \rho^\alpha g^\beta h^\gamma (D - d)^\delta.$$

2.2. (3 балла) Снимите зависимость массового расхода μ (мг/с) песка, высыпавшегося из отверстия в пробке бутылки, от диаметра отверстия D . Так как эксперимент может оказаться продолжительным, то для проверки воспроизводимости достаточно трижды повторить опыт по измерению массового расхода μ только для отверстия диаметром $D = 3$ мм. Определите наибольшее отклонение от среднего значения.

2.3. (4 балла) Определите значение параметра d .

2.4. (1 балл) Оцените погрешность d .

Внимание! Будьте аккуратны и не рассыпайте песок мимо ёмкости.

Оборудование. Песочные часы, миллиметровая бумага, секундомер, весы (до 200 г), брусок, пластмассовая бутылка без дна, пластиковые крышки от бутылок с отверстиями различного диаметра (3; 4; 5; 6) мм, 2 прямоугольные ёмкости для песка (одна из них с песком), деревянный штатив.

Задача 2. Грелка

Саморазогревающаяся солевая грелка (рис. 2) представляет собой тонкий прочный пакет с ацетатом натрия, в котором плавает легкая белая таблетка (кнопка-активатор). Ацетат натрия при комнатной температуре является переохлажденной жидкостью (комнатная температура **ниже** температуры ее кристаллизации).

При нажатии на кнопку активатора запускается процесс кристаллизации с выделением большого количества теплоты. Вы увидите, как внутри пакета распространяется волна кристаллизации. После нажатия кнопки активатора остановить работу **невозможно!**

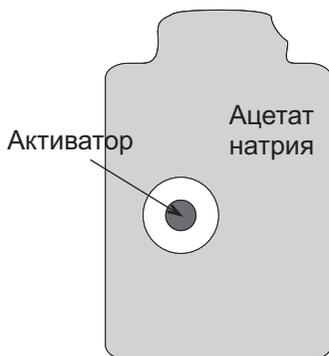


Рис. 2

Внимание! Перед тем как активировать грелку (запустить процесс кристаллизации), прочитайте условие до конца. Продумайте, что и в какой последовательности вы будете измерять. Подготовьте оборудование. Вам выдано две одинаковые грелки. В процессе эксперимента вам придется их обе активировать, но эксперимент с ними вы сможете провести только один раз! **Дополнительные грелки вам выдаваться не будут!**

Задание.

1. (2 балла). Используя первую из грелок, определите температуру кристаллизации ацетата натрия.

2. (5 балла). Положите в большую кювету вторую грелку и залейте ее водой массой 120 г. **Запомните уровень воды!** Запустите процесс кристаллизации, закройте кювету крышкой с ручкой и отверстием под термометр.

- Снимите зависимость температуры воды от времени (в диапазоне от 0 до 30 минут с момента активации).
- Постройте график этой зависимости.
- Оцените время протекания процесса кристаллизации.

3. (4 балла). Налейте в большую кювету теплую воду примерно той же температуры, которой достигала вода в п.2. эксперимента до прежнего уровня.

Закройте кювету крышкой и определите мощность тепловых потерь кюветы с водой в окружающую среду.

4. (4 балла). По результатам п.2 и п.3 определите удельную теплоту кристаллизации λ_a ацетата натрия.

При расчетах примите: удельная теплоемкость воды $c_v = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, удельная теплоемкость ацетата натрия $c_a = 2300 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ в жидком и твёрдом состоянии одинаковая, удельная теплоемкость пластика большой кюветы $c_k = 2000 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$.

Примечание. В данной работе погрешность рассчитывать **не требуется**. За порчу термометра возможен штраф **–5 баллов!** Будьте аккуратны с горячей водой!

Оборудование. 2 солевых грелки, термометр, вода, секундомер, один большой и два маленьких пластиковых кювета, крышка большого кювета с прорезью для термометра, пластиковая лента для извлечения крышки, вода, весы (нагружать которые *не более* чем до 290 г !), измерительная лента, шприц, самоклеющиеся стикеры.

10 класс

Задача 1. Затухающие колебания

В этой задаче исследуются колебания теннисного шарика на нитке.

Часть 1. В данной части работы следует проводить измерения при постоянном начальном отклонении шарика 40° .

1.1. Нить рекомендуется взять такой длины, чтобы расстояние от точки подвеса до центра шарика было 60–70 см. Снимите зависимость времени τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается вдвое, от массы m шарика (не менее 7 точек).

1.2. Известно, что $\tau(m) = km^\alpha$, где k , α — постоянные коэффициенты. Найдите k , α .

Часть 2. В данной части работы следует проводить измерения при максимальной массе шарика. Амплитуда колебаний A — длина дуги окружности между равновесным положением шарика и максимальным отклонением шарика от положения равновесия.

2.1. Снимите зависимость амплитуды колебаний от времени t при угловом значении амплитуд в диапазоне от 60° до 20° (не менее 7 точек).

Рассмотрим результаты двух теорий, описывающие зависимость $A(t)$:

2.2.1. Ламинарное обтекание шарика воздухом. $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$, где A_0 — начальная амплитуда колебаний, $\delta = 3\pi r\eta/m$, r — радиус шарика, m — масса шарика, η — вязкость воздуха. Известно, что $\eta \in [0,5; 5] \cdot 10^{-5}$ Па·с. Проверьте применимость теории к вашим результатам.

2.2.2. Турбулентное обтекание шарика воздухом. $A(t) = A_0/(1 + \beta A_0 t)$, где $\beta = \pi \rho d^2 C_d / (3mT)$, $\rho = 1,17$ кг/м³ — плотность воздуха, d — диаметр шарика, T — период колебаний, C_d — некоторый коэффициент. Из теоретических соображений известно, что $C_d \in [0,4; 4]$. Проверьте применимость теории к вашим результатам.

Сделайте оценки погрешности ваших результатов.

Указание. Период малых колебаний шарика на длинной нити примерно равен $2\pi\sqrt{l/g}$, где l — расстояние от точки подвеса до центра масс груза, $g = 9,8$ м/с² — ускорение свободного падения на Земле. **Во всех частях работы зависимостью периода колебаний от их амплитуды и массы шарика можно пренебречь.**

Оборудование. Штатив, измерительная лента, нитка, бумажный транспортир, теннисный шарик известной массы 2,4 г, шприц, стакан с водой, миллиметровая бумага (для построения графиков).

Задача 2. Диод Зенера

- 1. Определите ёмкость конденсатора C_2 . 2 балла
 - 2. Определите сопротивление мультиметра в режиме вольтметра постоянного тока (на всех пределах измерения) 1 балл
 - 3. Определите сопротивления резисторов R_1 и R_2 . 3 балла
 - 4. Снимите вольтамперную характеристику диода Зенера. 9 баллов
- Погрешности оценивать не требуется.

Примечание. При подключении электролитических конденсаторов подключайте длинный вывод к «+», короткий — к «-».

Оборудование.

Электролитический конденсатор $C_1 = 1000$ мкФ, электролитический конденсатор C_2 , два резистора R_1 и R_2 , два мультиметра (режим амперметра отключён), диод Зенера, батарейки, макетная плата, миллиметровая бумага.

Примечание. Каждые пять выводов макетной платы, расположенные в одном столбце по одну сторону от середины платы, соединены внутри платы друг с другом. Например, выводы, отмеченные серым (рис. 3), замкнуты между собой.

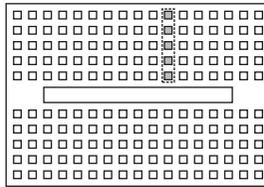


Рис. 3

11 класс

Задача 1. Магнитные шары

Поле однородно намагниченного шара радиусом R на расстояниях $r \geq R$ от центра шара совпадает с полем точечного диполя \vec{P}_m , равного полному магнитному моменту шара, расположенного в его центре и направленного от южного (S) к северному (N) магнитному полюсу. Например, магнитное поле Земли хорошо описывается полем точечного магнитного диполя, расположенного в ее центре.

Полный магнитный момент определяется намагниченностью \vec{p} вещества, из которого изготовлен шар. По определению, намагниченность — это магнитный момент единицы объёма. Для однородно намагниченного шара намагниченность равна: $\vec{p} = \vec{P}_m/V$, где V — объём шара.

Если шар изготовлен из магнитожёсткого материала, то можно считать, что под действием внешних магнитных полей его намагниченность не изменяется и шар ведёт себя как жёсткий диполь.

Электрическим аналогом магнитного шара из магнитожёсткого материала является диэлектрический шар, изготовленный из электрета — материала с «замороженной» поляризацией. Шар, изготовленный из электрета, ведёт себя в электрическом поле точно так же, как и шар с постоянной намагниченностью в магнитном поле. Это означает, что формулы, описывающие взаимодействие постоянных шарообразных магнитов между собой и с магнитным полем, полностью — с точностью до обозначений — идентичны формулам, описывающим поведение электрических диполей в электрическом поле.

Напомним основные формулы, которые могут вам потребоваться в предлагаемой работе:

1. Индукция поля \vec{B} точечного магнитного диполя \vec{P}_m в точке с радиус-вектором \vec{r} относительно диполя (система СИ):¹

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\vec{P}_m, \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}_m}{r^3} \right),$$

где μ_0 — магнитная константа.

2. На магнитный диполь \vec{P}_m в поле \vec{B} действует момент сил:²

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}].$$

3. Энергия диполя \vec{P}_m в поле \vec{B} :

$$W = -(\vec{P}_m, \vec{B}).$$

¹Здесь за (\vec{a}, \vec{b}) обозначено скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

²Здесь за $[\vec{a}, \vec{b}]$ обозначено векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

Задание:

1. Для магнита с диаметром $d_5 = 15$ мм определите расположение его северного (N) и южного (S) полюсов и подробно опишите способ определения полюсов. Отметьте синим фломастером северный полюс магнита, а красным — южный.

2. Снимите зависимость максимальной силы притяжения $F(r)$ от расстояния r между центрами шаров диаметром $d = 15$ мм. Опишите метод измерений, результаты измерений занесите в таблицу 1. Считая $F \sim r^n$, определите n . Сравните результат с теорией. При расчетах считайте, что взаимодействие двух однородно намагниченных шаров можно рассматривать как взаимодействие точечных диполей, расположенных в центрах шаров.

3. Измерьте максимальную силу сцепления F_{ii} двух одинаковых шаров с диаметрами $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$, результаты занесите в таблицу 2. Проанализируйте полученные результаты и сравните намагниченности шаров.

4. Найдите отношение p_{20}/p_{10} намагниченности p_{20} шара диаметром $d_6 = 20$ мм к намагниченности p_{10} шара диаметром $d_4 = 10$ мм, внесите результат в таблицу 3.

5. Найдите отношение B_{20}/B_{10} величины индукции магнитного поля B_{20} на полюсе магнита диаметром $d_6 = 20$ мм к величине индукции магнитного поля B_{10} на полюсе магнита диаметром $d_4 = 10$ мм, внесите результат в таблицу 3.

6. Измерьте максимальные силы сцепления шаров F_{ij} различных диаметров для всевозможных пар, занесите результаты в таблицу 4.

7. Выразите максимальную силу сцепления F_{ij}^t шаров разных диаметров d_i и d_j , используя значения сил сцепления шаров с одинаковыми диаметрами F_{ii} и F_{jj} .

8. Рассчитайте значения F_{ij}^t , результаты занесите в таблицу 5. Сравните полученные расчетные значения силы с экспериментальными, измеренными в пункте 6.

Оборудование.

Шарообразные магниты различных диаметров из магнитожёсткого материала (по паре каждого диаметра): $d_1 = 3$ мм, $d_2 = 5$ мм, $d_3 = 7$ мм, $d_4 = 10$ мм, $d_5 = 15$ мм и $d_6 = 20$ мм, точность измерения диаметров $d - 0,1$ мм; электронные весы (безмен); штатив с закреплёнными уголками с отверстиями; четыре немагнитные чашечки на коромыслах; 8 пластинок толщиной $h = 1,2 \pm 0,05$ мм каждая.

ВНИМАНИЕ. Уважаемые участники олимпиады! Рекомендуем вам не располагать механические часы вблизи магнитных шариков. Обращаем также ваше внимание на то, что магнитные шарики могут нанести вред в случае заземления участка кожи между двумя шариками.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Песочные часы

Часть 1. Масса песка.

1.1. Расположим часы вертикально и пересыпем весь песок полностью в одну половину часов. Перевернём часы и засечём время t_1 . Затем быстро перевернём часы и измерим время t_2 , за которое песок высыпется обратно. Эти времена равны в пределах погрешности. В первом случае высота столба максимальна, а во втором во много раз меньше. Равенство времён указывает на то, что массовый расход от высоты не зависит.

1.2. Пересыпем весь песок полностью в одну половину часов и расположим часы горизонтально. Добьёмся того, чтобы поверхность песка была горизонтальной. Поместим часы одной опорой на весы, а другой — на брусок (измерение 1). Затем пересыпем песок в другую колбу и положим часы так же (колба с песком на весах, измерение 2). Обозначим m_0 — масса часов вместе с песком, m — масса песка, m_1 — показания весов в измерении 1, m_2 — показания весов в измерении 2. Пусть центр масс часов без песка находится на расстоянии x от перемычки, а длины колб составляют l_1 и l_2 соответственно. Запишем уравнения моментов для обоих измерений:

$$m_1(l_1 + l_2) = m(l_2 + \frac{l_1}{2}) + (m_0 - m)(l_2 - x),$$

$$m_2(l_1 + l_2) = m\left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) + (m_0 - m)(l_1 + x).$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) = m \cdot \frac{3}{2}(l_1 + l_2) + (m_0 - m)(l_1 + l_2)$$

Отсюда:

$$m = 2(m_1 + m_2 - m_0).$$

Часть 2. Скорость хода часов.

2.1. В пункте 1.1 установлено, что массовый расход от высоты не зависит, значит $\gamma = 0$. Размерности $[g] = \text{м}/\text{с}^2$, $[D - d] = \text{м}$, $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$, $[\mu] = \text{кг}/\text{с}$. Размерность времени входит только в g , отсюда определяем, что $\beta = 1/2$. Размерность массы входит только в ρ , отсюда определяем, что $\alpha = 1$. Чтобы размерность длины была правильной, $\delta = 5/2$, значит:

$$\mu = C\rho g^{1/2}(D - d)^{5/2}.$$

2.2. С помощью секундомера и весов снимем зависимость массового расхода песка от диаметра отверстия. Для наименьшего диаметра проведем несколько

измерений, результаты усредним. Разброс значений от среднего примерно 5 %, следовательно, значения массового расхода при остальных диаметрах можно находить по 1 точке. Данные занесём в таблицу.

μ , г/с	d , мм	$\mu^{2/5}$, (г/с) ^{2/5}
0,73	3	0,88
1,67	4	1,23
2,83	5	1,52
4,86	6	1,88

2.3. Для нахождения величины d линеаризуем зависимость, полученную в п. 2.1 и построим график в координатах $\mu^{2/5}(D)$, он будет пересекать ось абсцисс при $D = d$. Найдём из графика $d = 0,56$ мм.

Задача 2. Грелка

1. Для решения пункта необходимо активировать первую грелку.

При этом от кнопки активатора начнет распространяться волна кристаллизации ацетата, которая в течении нескольких секунд распространится на всю грелку. Однако это не означает, что кристаллизация прошла полностью, ведь грелка остается мягкой на ощупь и продолжает нагреваться. Следовательно, между первичными кристаллами, формирующими видимый фронт кристаллизации, захватываются объемы жидкого раствора (процесс инклюзии), а их кристаллизация происходит уже значительно позднее.

Достаточно долгое время ацетат будет находиться в состоянии смеси твердого и жидкого вещества при определенной температуре. Этой температурой будет температура кристаллизации, потому что в состоянии устойчивого теплового равновесия система жидкость-твердое тело может существовать только при этой температуре. Ее можно измерить непосредственно термометром, обернув активированную грелку вокруг него. Когда температура перестанет расти, термометр покажет искомое значение. Ответ: $T_{кр} = 53$ °С.

2. При подготовке к выполнению эксперимента необходимо измерить массы кюветы m_k , воды m_v и грелки $m_{гр}$ (можно считать равной массе ацетата ввиду тонкости пленки и легкости активатора). При этом нужно следить за тем, не превышает ли масса кюветы с содержимым 290 грамм, иначе измерения на весах провести невозможно. Также необходимо измерить начальную температуру воды $T_{в0}$ и окружающей среды (холодной грелки) T_c , они могут немного отличаться. После того, как залитая водой грелка будет готова к выполнению задания, необходимо запомнить уровень воды, это можно сделать с помощью стикера.

а) Для более точного исследования зависимости $T(t)$, показания термометра необходимо снимать не менее чем через каждые 30 секунд до выхода на установившуюся температуру. Далее измерения следует проводить не реже, чем через минуту для отсечки времени начала спада.

б) График зависимости $T(t)$ должен включать в себя 3 участка:

- Быстрый рост температуры (0; $t_1 \approx 4-5$ минут).
- Постоянная температура ($T = T_B$) ($t_1; t_2 \approx 15-25$ минут).
- Медленно убывающая температура ($t_2; t_3 \approx 30$ минут).

в) На втором участке мощность тепловых потерь системы в окружающую среду равна мощности тепла, поступающего от грелки. Эти мощности зависят от разности температур между водой и окружающей средой и между водой и грелкой соответственно. Поскольку температура среды и воды постоянны, постоянна и температура грелки, а значит в ней продолжается кристаллизация. Уменьшение температуры воды говорит о начале падения температуры грелки, что в свою очередь свидетельствует о прекращении процесса кристаллизации. Следовательно, время кристаллизации $t_{кр} = t_2$.

3. Пусть за малый промежуток времени Δt температура воды изменилась на ΔT . Вместе с водой остывает и кювета, поэтому энергия, выделившаяся из системы равна $(c_B m_B + c_K m_K) \Delta T$, а мощность тепловых потерь равна

$$P = \frac{(c_B m_B + c_K m_K) \Delta T}{\Delta t} \quad (1)$$

Задача этого пункта — как можно точнее определить значение величины $\alpha = \Delta T / \Delta t$ в окрестности $T = T_B$. Очевидно, что $T(t)$ не является линейной. Следовательно, α лучше всего определить с помощью касательной ($T = \alpha t + B$) к $T(t)$.

Снимем зависимость $T(t)$ кюветы с водой. Цена деления термометра достаточно велика, поэтому самым лучшим методом будет измерение температуры через одинаковые (30–60 с) промежутки времени. После построения графика, проведем касательную к точке, соответствующей температуре $T = T_B$. По угловому коэффициенту ее наклона определим α . Подставив значение α в (1) получим:

$$P = (c_B m_B + c_K m_K) \alpha = 5,0 \text{ Вт.}$$

4. Уравнение теплового баланса за время кристаллизации должно учитывать:

- Нагревание грелки до температуры $T_{кр}$ (до окончания кристаллизации она не остывает!): $Q_1 = c_{гр} m_{гр} (T_{кр} - T_c)$.
- Нагревание воды до температуры T_B : $Q_2 = c_B m_B (T_B - T_{B0})$.
- Нагревание кюветы до температуры T_B : $Q_3 = c_K m_K (T_B - T_{B0})$.
- Тепловые потери в окружающую среду: $Q_4 = P (t_{кр} - \frac{t_1}{2})$.
- Количество теплоты, выделившееся при полной кристаллизации грелки: $\lambda m_{гр}$.

Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\lambda m_{гр} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

откуда численное значение $\lambda = 2,0 \cdot 10^5$ Дж/кг.

10 класс

Задача 1. Затухающие колебания

Часть 1.

Время в данной задаче нужно измерять по числу колебаний маятника. Можно заметить, что использование бифилярного подвеса значительно улучшает качество измерений, так как фиксирует плоскость колебаний маятника.

1.1. Добавляя в шарик определенные порции воды с помощью шприца, снимем зависимость $\tau(m)$. Данные приведены в таблице 1 для длины нити $l \approx 67$ см. Погрешность измерения массы определяется ценой деления шприца и накапливается с увеличением массы. Погрешность же измерения времени постоянна и равна половине периода.

Таблица 1.

τ/T	2	6	9	13	16	19	22	25	28	32	35
$m, \text{ г}$	2,4	5,4	8,4	11,4	14,4	17,4	20,4	23,4	26,4	29,4	32,4

1.2. Построив график полученной зависимости (рис. 4), убеждаемся что он линеен, и $\alpha = 1$. Из коэффициента наклона полученной прямой находим, что $k = (1,77 \pm 0,03) \text{ с/г}$.

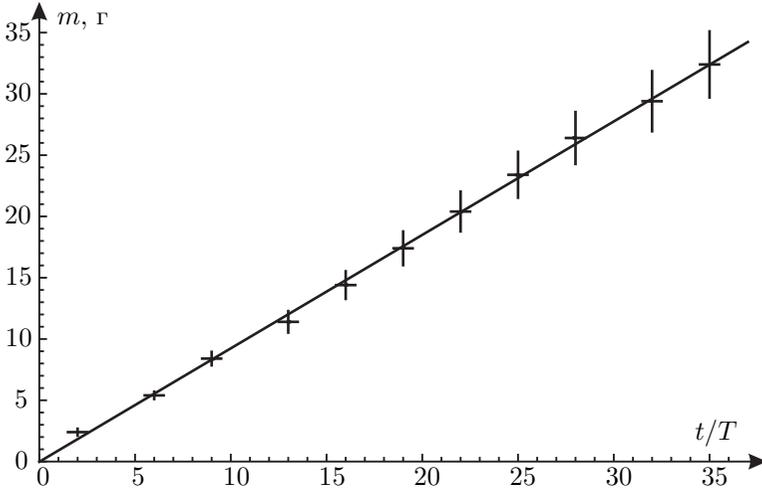


Рис. 4

Часть 2.

2.1. Снимем зависимость угловой амплитуды φ от времени.

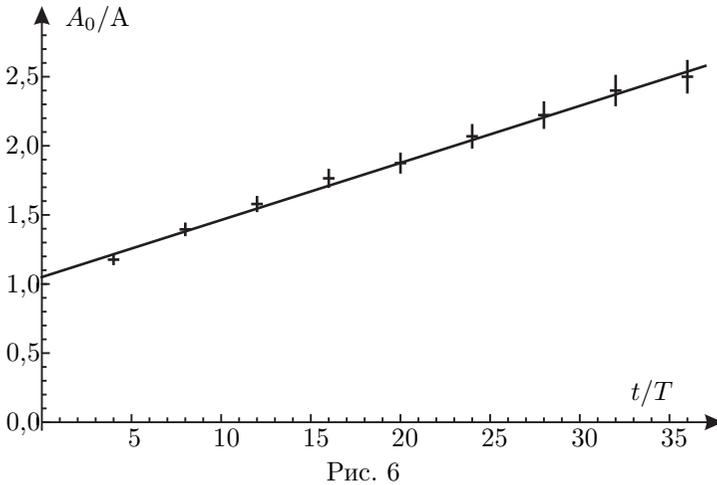
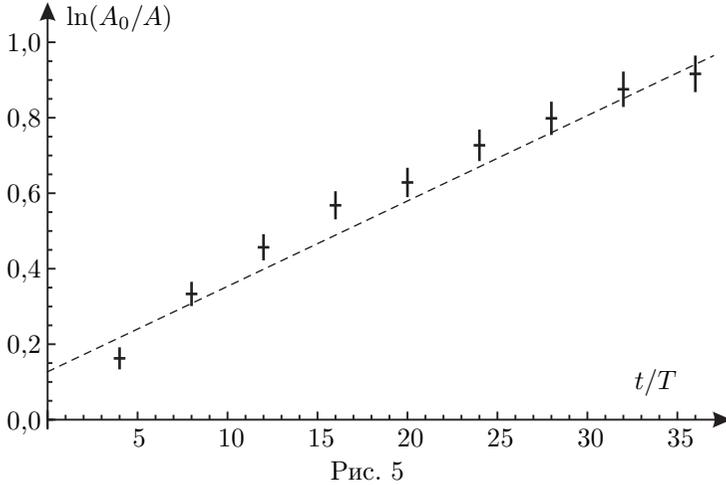
Таблица 2.

t/T	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
$\varphi, ^\circ$	60	51	43	38	34	32	29	27	25	24	22,5	21

2.2.1. Линеаризуем заданную в этом пункте зависимость. $\ln(A_0/A) = \delta t$. Построим график зависимости $\ln(A_0/A)$ от (t/T) (рис. 5).

Таблица 3.

t/T	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$\ln(A_0/A)$	0,00	0,16	0,33	0,46	0,57	0,63	0,73	0,80	0,88	0,92



Как мы видим, полученная зависимость не является линейной. Но, даже если мы примем ее за линейную, оценив из графика значение $\eta \approx 2 \cdot 10^{-3}$ Па·с, мы обнаружим расхождение на два порядка с величиной, предложенной в условии. Следовательно, данная теория неприменима.

2.2.2. Линеаризуем заданную в данном пункте зависимость. $A_0/A = 1 + \beta A_0 t$. Построим график зависимости A_0/A от t/T (рис. 6).

Таблица 4.

t/T	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
A_0/A	1,00	1,18	1,40	1,58	1,76	1,88	2,07	2,22	2,40	2,50

Как мы видим, полученная зависимость линейна в пределах погрешности. Однако, для подтверждения теории необходимо проверить, что значение C_d лежит в заданном промежутке. Это значение мы можем вычислить из коэффициента наклона полученной прямой. $C_d = (0,88 \pm 0,02)$, что окончательно подтверждает применимость второй теории.

Задача 2. Диод Зенера

1. Для определения неизвестной ёмкости соединим последовательно конденсаторы неизвестной и известной ёмкостей и зарядим их от батарейки (рис. 7). После этого измерим напряжения на конденсаторах U_1 и U_2 . Через конденсаторы протёк заряд $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$, откуда получаем ответ:

$$C_2 = C_1 \frac{U_1}{U_2} = 100 \text{ мкФ.}$$

2. Подключим мультиметр в режиме омметра к вольтметру постоянного тока и получим, что сопротивление вольтметра равно $R_V = 1 \text{ МОм}$ на всех пределах измерения.

3. Значение меньшего из сопротивлений измерим непосредственно мультиметром в режиме омметра, получим $R_1 = 10 \text{ кОм}$. Для измерения сопротивления другого резистора соединим вольтметр и этот резистор параллельно и подключим к омметру. Обозначим общее сопротивление $R_{\text{общ}}$. Получим, что сопротивление неизвестного резистора:

$$R_2 = \frac{R_V R_{\text{общ}}}{R_V - R_{\text{общ}}} = 10 \text{ МОм.}$$

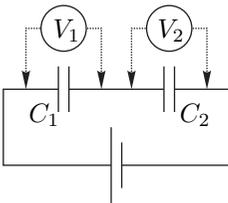


Рис. 7

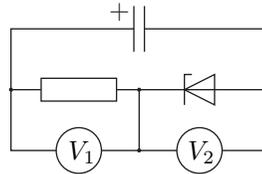


Рис. 8

4. Для того, чтобы снять вольтамперную характеристику диода Зенера (разг. стабилитрон), в качестве источника переменного напряжения используем предварительно заряженный конденсатор $C_1 = 1000 \text{ мкФ}$. Напряжение на

стабилитроне U_2 определяем с помощью параллельно подключенного вольтметра (рис. 8). Для определения тока используем балластный резистор $R_1 = 10$ кОм, на котором измеряем напряжение U_1 . Тогда ток, текущий через стабилитрон, равен:

$$I = \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_V}.$$

Эта формула учитывает то, что при некоторых напряжениях U_2 ток, текущий через стабилитрон, сравним с током, текущим через вольтметр U_2 .

Для увеличения диапазона можно в качестве источника использовать заряженный конденсатор с последовательно включенной батарейкой. Данные приведены в таблице, ВАХ — на рис. 9.

U_s , В	I_s , мкА						
-3,80	-188,9	-2,80	-9,6	0,00	0,0	0,59	21,3
-3,60	-107,4	-2,70	-6,8	0,46	0,6	0,60	29,6
-3,40	-62,0	-2,60	-4,7	0,47	0,8	0,63	71,7
-3,30	-46,4	-2,50	-3,2	0,48	1,1	0,64	97,9
-3,20	-34,9	-2,40	-2,1	0,50	1,8	0,65	133,9
-3,10	-25,3	-2,30	-1,4	0,52	3,2	0,66	182,9
-3,00	-18,6	-2,20	-0,9	0,54	5,5	0,67	254,9
-2,99	-17,9	-2,10	-0,5	0,55	7,2	0,68	344,7
-2,90	-13,3	-2,00	-0,4	0,57	12,8	0,69	474,0

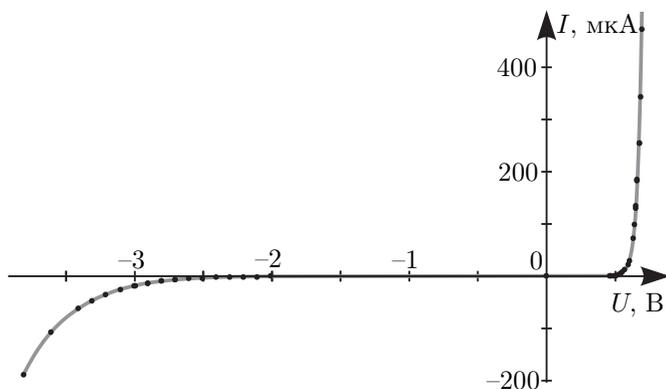


Рис. 9

Будем считать, что тока через стабилитрон больше нуля тогда, когда вывод с черной меткой подключен к «+» источника. В этом случае стабилитрон ведет себя как обыкновенный диод. В обратном направлении стабилитрон находится при напряжениях меньших напряжения стабилизации (для данного стабилитрона $U_S = 5,1$ В), поэтому, ВАХ имеет не характерный для стабилитрона вид.

11 класс

Задача 1. Магнитные шары

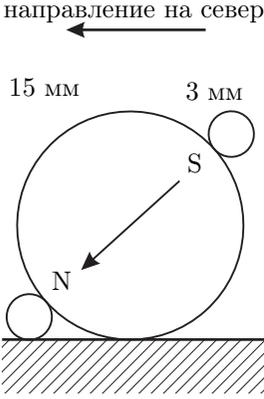


Рис. 10

1. Если взаимодействующие шары расположить недалеко друг от друга и при этом не препятствовать их свободному вращению, то их магнитные моменты выстроятся вдоль линии, соединяющей центры шаров. Такое расположение соответствует минимуму энергии магнитного взаимодействия шаров. Если шары отпустить, то они сцепятся противоположными полюсами.

Для определения северного и южного полюсов шара диаметром $d_5 = 15$ мм подцепим к его противоположным полюсам два маленьких 3-х миллиметровых шарика и положим его на поверхность стола. Расположим наш шар подальше от магнитных предметов и других магнитов. Шар под действием магнитного поля Земли развернётся так, что один из подцепленных маленьких магнетиков будет смотреть вверх, а другой — вниз (рис. 10). Нижний шарик соответствует северному, а верхний — южному полюсу большого шара. Это связано с тем, что Екатеринбург — город, где проходит олимпиада — находится в северном полушарии Земли, и силовые линии магнитного поля наклонены под углом к горизонту вниз. Пометим полюса магнита фломастером: синим цветом — северный полюс, красным — южный. Аналогичным образом определим и пометим полюса остальных шариков.

2. Снимем зависимость силы взаимодействия $F(r)$ шаров диаметром $d = 15$ мм от расстояния r между центрами шаров. Для этого соберём схему, показанную на рис. 11.

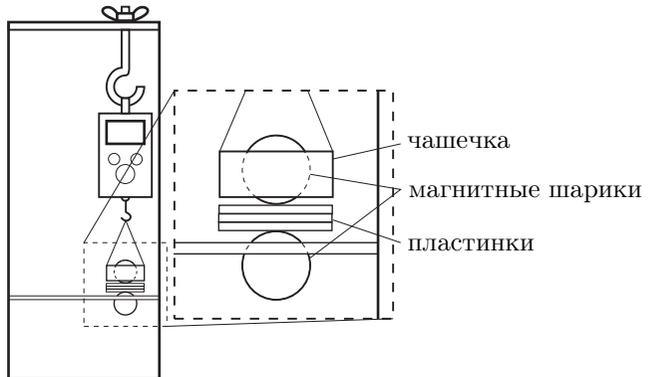
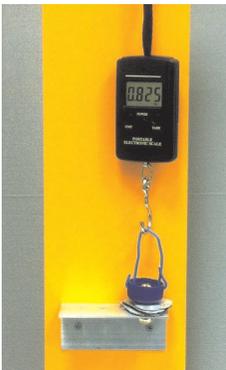


Рис. 11

Отверстия в чашке и уголке должны быть такими, чтобы шары соприкасались, причём соприкасались полюсами: сила притяжения шаров при этом будет максимальная. Силу притяжения измеряем с помощью весов следующим образом: вращая барашек крюка, опустим чашечку до заведомого соприкосновения верхнего шара с нижним. В этом случае часть силы сцепления магнитных шаров уравновешивается силой упругости шаров, а часть — натяжением весов. Будем медленно затягивать барашек, приподнимая чашечку. Сила упругости будет уменьшаться и достигнет нуля в момент отрыва верхнего шара от нижнего. В этот момент показания весов M максимальны. Дальнейшее поднятие чашки приведёт к увеличению расстояния между шарами и ослабевания магнитной силы. Таким образом, максимальные показания весов соответствуют силе взаимодействия шаров при их соприкосновении.

Для учёта веса чашки с шаром, подвешиваем шар с чашкой на весах вдали от магнитов и с помощью клавиши «TARE» обнуляем показание весов. Расстояние между шарами можно изменять, прокладывая между шарами разное количество пластин известной толщины, при этом так же будем записывать максимальные показания весов, соответствующие отрыву верхнего шара от пластин. Результаты измерений представлены в Таблице 1, где m — количество пластинок между шарами, $r = d + mh$ — расстояние между центрами шаров, M — показания весов, F — сила взаимодействия шаров, $r_0 = 1$ мм, $F_0 = 1$ гс¹.

Таблица 1. Зависимость $F(r)$.

m	r , мм	M , кг	F , гс	r^{-4} , 10^{-6} мм ⁻⁴	$\ln r/r_0$	$\ln F/F_0$
0	15,0	2,800	2800	19,8	2,708	7,94
1	16,2	2,080	2080	14,5	2,785	7,64
2	17,4	1,520	1520	10,9	2,856	7,33
3	18,6	1,140	1140	8,4	2,923	7,04
4	19,8	0,865	865	6,5	2,986	6,76
5	21,0	0,680	680	5,1	3,045	6,52
6	22,2	0,540	540	4,1	3,100	6,29
7	23,4	0,430	430	3,3	3,153	6,06
8	24,6	0,350	350	2,7	3,203	5,86

Чтобы определить степень, построим график $F(r)$ в двойном логарифмическом масштабе (рис. 12). По наклону графика определим $n = -4,23 \pm 0,25$.

Найдём теоретическое значение n . Энергия взаимодействия двух сонаправленных точечных диполей P_1 и P_2 , ориентированных вдоль соединяющей их линии:

$$W = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_1 P_2}{r^3}.$$

¹В данном случае удобно пользоваться такой внесистемной единицей измерения как грамм-сила, гс. Сила в 1 гс соответствует весу 1 грамма.

Тогда сила их взаимодействия:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{P_1 P_2}{r^4}.$$

Знак «минус» означает, что шары притягиваются. Таким образом, теоретическое значение $n = -4$.

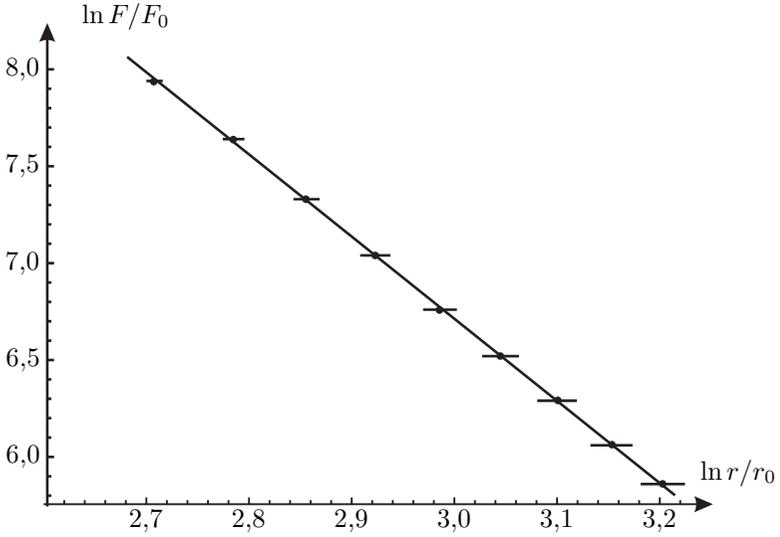


Рис. 12

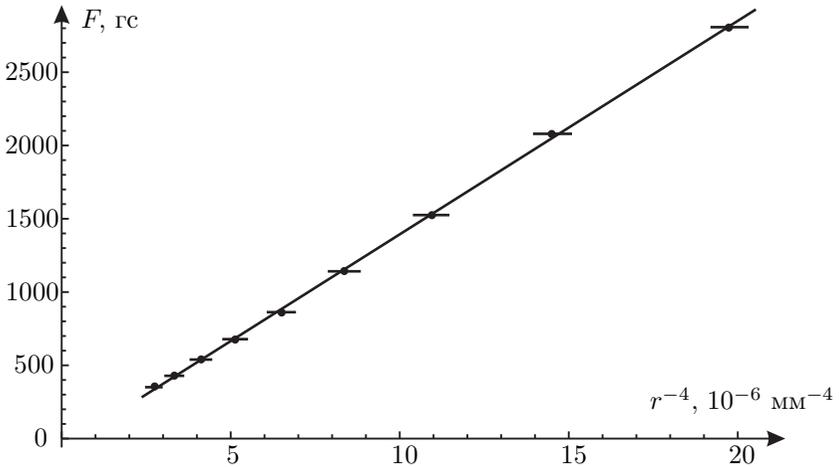


Рис. 13

Видно, что в пределах погрешности теоретическое значение n совпадает с экспериментальным, а значит, магнитные шары действительно взаимодействуют как жёсткие точечные диполи, расположенные в центрах шаров.

Соответствие теории эксперименту можно также показать, построив график зависимости $F(r^{-4})$ (рис. 13). Через экспериментальные точки можно провести прямую, проходящую через начало координат, что подтверждает совпадение теории с экспериментом в пределах погрешности.

3. Таким же методом измеряем максимальную силу сцепления одинаковых шаров. Максимальная сила будет достигаться при их касании разноимёнными полюсами. Данные приведены в таблице 2.

Таблица 2. Зависимость $F_{ii}(d)$

i	d_i , мм	F_{ii} , гс	$\sqrt{F_{ii}}$, гс ^{1/2}
1	3	113	10,6
2	5	305	17,5
3	7	630	25,1
4	10	1350	36,7
5	15	2800	52,9
6	20	430	20,7

Если предположить, что некоторые шары намагничены одинаково и взаимодействуют как точечные жёсткие диполи, то силы сцепления увеличиваются пропорционально квадрату диаметра:

$$F \sim \frac{P_m^2}{d^4} = \frac{(pV)^2}{d^4} \sim \frac{p^2 d^6}{d^4} = p^2 d^2.$$

Для проверки этой зависимости строим график зависимости в координатах (d, \sqrt{F}) . Видно, что точки, соответствующие шарам 1–5, лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, а точка, соответствующая шару 6, не лежит на этой прямой. Это означает, что намагничённость шаров 1-5 диаметрами $d_{1-5} = 3-15$ мм в пределах точности измерений одинакова, а намагничённость шарика диаметра $d_6 = 20$ мм заметно меньше.

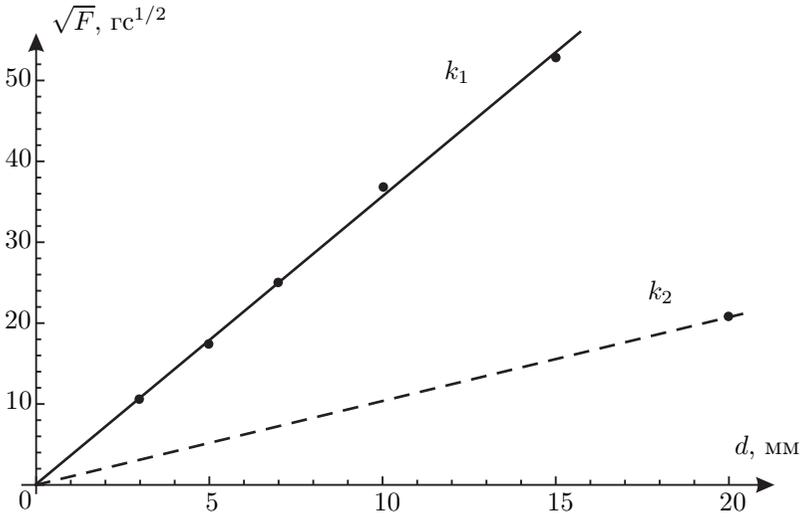


Рис. 14

4. Определим отношение намагниченностей p_{20}/p_{10} шариков $d_6 = 20$ мм и $d_4 = 10$ мм. Проще всего это сделать по графику в пункте 3, найдя отношение угловых коэффициентов построенных прямых:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{k_2}{k_1} = 0,285 \pm 0,010.$$

5. Найдём отношение полей B_{20}/B_{10} на полюсах магнитов с $d_6 = 20$ мм и $d_4 = 10$ мм. Величина магнитного поля на полюсе шара пропорциональна его намагниченности и не зависит от его радиуса $R = d/2$:

$$B \sim \frac{P_m}{R^3} = \frac{pV}{R^3} \sim p, \quad \text{тогда} \quad \frac{B_{20}}{B_{10}} = \frac{p_{20}}{p_{10}} = 0,285 \pm 0,010.$$

6. Измерим максимальные силы взаимодействия F_{ij} шаров разных диаметров. Результаты измерений представлены в таблице 3.

Таблица 3. Экспериментальные значения силы взаимодействия F_{ij} и их теоретические значения F_{ij}^t .

$F_{ij}, \text{ Гс}$ $F_{ij}^t, \text{ Гс}$	1	2	3	4	5	6
1	113	170 163	205 188	210 196	190 173	45 45
2		305	420 414	505 507	540 520	175 148
3			630	895 866	1025 1000	315 307
4				1350	1835 1792	660 602
5					2800	1135 1053
6						430

7. Рассчитаем силу взаимодействия двух шаров разных диаметров d_i и d_j :

$$F_{ij} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} P_i P_j \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right)^{-4} \sim \frac{P_i P_j}{(d_i + d_j)^4}.$$

Для одинаковых шаров $i = j$ эта формула даёт:

$$F_{ii} \sim \frac{P_i^2}{16d_i^4}, \quad F_{jj} \sim \frac{P_j^2}{16d_j^4}.$$

Окончательно получим:

$$F_{ij} = \sqrt{F_{ii} F_{jj}} \frac{16d_i^2 d_j^2}{(d_i + d_j)^4}. \quad (2)$$

Эта формула позволяет теоретически выразить силу F_{ij} сцепления шаров разных диаметров через силы сцепления одинаковых шаров F_{ii} и F_{jj} .

8. Рассчитаем по формуле (2) теоретические значения F_{ij}^t и внесём их в таблицу 3. По таблице видно, что для большинства ячеек различие экспериментальных значений с расчётными не превышает 2–5 %, таким образом в пределах точности измерений эксперимент согласуется с теорией.